МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ТОМ XXVII ВЫПУСК 7

Ульяновск
1972

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ТОМ XXVII ВЫПУСК 7

Ульяновск
1972

Ф. Г. КУЗНЕЦОВ

ПРОГРАММЫ И. Н. УЛЬЯНОВА*

(математика, физика, космография)

Илья Николаевич Ульянов был ярким представителем передовой интеллигенции, которая боролась за претворение в жизнь идей революционных демократов по народному образованию, за распространение естественнонаучных знаний в народе.

Знакомство И. Н. Ульянова с идеями революционных демократов, с прогрессивными педагогическими идеями, с лучшими методами обучения и воспитания не могло не оказать влияния на формирование его взглядов в вопросах обучения и воспитания, в вопросах улучшения и совершенствования методики преподавания физико-математических дисциплин. «Чтобы понять до конца, — писала Н. К. Крупская, — кем был Илья Николаевич, надо почитать «Современник», выходивший под редакцией Некрасова и Панаева, где сотрудничали Белинский, Чернышевский, Добролюбов»[1].

В Нижнем Новгороде Илья Николаевич выступал не только как талантливый педагог-практик, но и как крупный методист. Он принимал активное участие в работе педагогических советов нижегородских учебных заведений, на которых обсуждались новейшие методы, приемы обучения и воспитания. Здесь он продолжал борьбу за

---

* И. Н. Ульяновым было составлено более тридцати программ по различным предметам (1865—1868 гг.). В настоящей статье рассматриваются лишь программы по математике, физике и космографии, составленные им в 1865 году.

[1] Н. К. Крупская. Педагогические сочинения. Т. 6. М., изд. АПН РСФСР, 1959, стр. 407.

реальное образование, сторонником которого оставался до конца своей жизни. «Отец мой, — вспоминала Анна Ильинична, — не стоял за классическое образование: он смотрел на него лишь как на необходимый мост к университету. Я слышала, как он говорил кому-то уже позднее, когда стали открываться реальные училища, что ничего не поделаешь, приходится отдавать детей в классическую гимназию, ибо без нее нет доступа в университет и способный мальчик потом может упрекнуть родителей, что они закрыли для него эту дорогу. Особенно был он против обязательности греческого языка»[2].

19 ноября 1864 года вышел новый устав гимназий и прогимназий, которым предполагалось установить две системы образования: классическую и реальную. В том же году указом правительства предписывалось: «Из числа существующих ныне 67 гимназий С.-Петербургского, Московского, Казанского, Харьковского, Одесского и Киевского учебных округов, преобразовать 17 гимназий в реальные, а 50 в классические»[3].

Этим уставом царское правительство почти перечеркивало все достижения прогрессивного учительства в деле распространения реального образования в России. Это был возврат к старой классической школе.

В классических гимназиях по новому уставу почти 50 процентов учебных часов отводились на изучение древних (латинского и греческого) и новых языков, а также закона божьего. В реальных же гимназиях большее внимание уделялось изучению математики и естественных наук.

Введение нового устава поставило передовое учительство в трудное положение. Приходилось думать и искать пути, как в создавшихся условиях давать учащимся наиболее полные и систематические знания. Параграфом 72-м устава составление, обсуждение и окончательное утверждение программ по каждому предмету предоставлялось преподавателям и педагогическим советам гимназий. К уставу прилагалась инструкция Министерства народного просвещения, составленная ученым-математиком

---

[2] А. И. Ульянова-Елизарова. Воспоминания об А. И. Ульянове. — В кн.: Александр Ильич Ульянов и дело 1 марта 1887 г. М.—Л., 1927, стр. 48.

[3] Центральный Государственный исторический архив (ЦГИА) СССР, ф. 733, оп. 165, ед. хр. 135, л. 176.

П. Л. Чебышевым. Она определяла, правда, довольно относительно, рамки, в которые должно было укладываться преподавание математики, физики, космографии и других дисциплин. Этим воспользовались прогрессивные преподаватели.

Илья Николаевич Ульянов, имеющий опыт педагогической деятельности и определенный взгляд на обучение, с присущей ему энергией принялся за составление программ по математике, физике и естественным дисциплинам. Он понимал, что успешность физико-математического образования зависит во многом от того, как и насколько правильно составлены программы по физико-математическим дисциплинам и кто будет претворять их в жизнь. И. Н. Ульянов был глубоко убежден в том, что учитель должен не только сообщать учащимся определенную сумму сведений, но, главным образом, развивать у них умение самостоятельно заниматься, прививать навыки практического применения теоретических положений. Он считал, что учитель математики и физики, как ни один другой, должен вырабатывать у учащихся навыки научного, логического мышления, формировать научное мировоззрение. Знания должны восприниматься не столько в готовом виде из учебника или со слов учителя, сколько путем глубоких размышлений учащихся над изучаемым материалом. В процессе преподавания И. Н. Ульянов ставил учащихся в такое положение, что они учились сопоставлять, сравнивать, анализировать и делать обобщающие выводы: на его уроках дети познавали радость творчества. Илья Николаевич был убежден, что сам процесс познания должен быть источником интереса к изучению математики и физики и, следовательно, содействовать глубокому и прочному усвоению научных истин. Только такой процесс обучения, который побуждает учащихся к напряженному самостоятельному умственному труду, приносит желаемые результаты, — считал Илья Николаевич.

Своими знаниями по методике и педагогике И. Н. Ульянов охотно делился с коллегами. 20 января 1865 года на заседании Соединенного педагогического совета (учрежден попечителем Казанского учебного округа в конце 1864 года) Нижегородской гимназии и дворянского института он изложил программы по математике, составленные им, для классической гимназии. В них раскрылась богатая натура Ильи Николаевича — педагога-

демократа и педагога-методиста. На этом совете ему пришлось вести борьбу со сторонниками формального обучения, ярыми представителями которого были инспектор дворянского института А. Шапошников и учитель математики гимназии В. Позняков.

Учебный материал по математике в классической гимназии И. Н. Ульянов распределял следующим образом.

В первом классе в продолжение всего года (при трех уроках в неделю) он предлагал пройти первую часть арифметики с практическими задачами, т. е. арифметику целых чисел.

Во втором классе за такое же число уроков изучались простые и десятичные дроби. Периодические и непрерывные дроби Илья Николаевич предлагал изучать в седьмом классе в курсе алгебры. Он полагал, что здесь можно будет дать учащимся строго научное изложение этой темы.

В третьем классе отводилось два урока в неделю на арифметику и один на алгебру. В арифметике изучали отношения, пропорции и тройное правило, а в алгебре четыре действия над целыми алгебраическими выражениями.

А. Шапошников, соглашаясь с объемом преподавания математики в третьем классе, возражал против распределения числа уроков для арифметики и алгебры. Он предлагал один урок для арифметики и два для алгебры в первом полугодии, а во втором — наоборот. Объяснял он это тем, что якобы для нового предмета (алгебры) требуется сначала больше времени, чтобы познакомиться с ним.

И. Н. Ульянов возражал против предложения А. Шапошникова и убедительно показал педагогическому совету несостоятельность его доводов. Он утверждал, что во вторую половину учебного года учащиеся будут более зрелыми и, следовательно, скорее поймут алгебру, как предмет более абстрактный, чем арифметика.

Против распределения учебного материала по арифметике в третьем классе, предложенного И. Н. Ульяновым, выступил и учитель гимназии В. Позняков. В свое[м] выступлении он высказал мнение о переносе изучения о[т]ношений и пропорций из арифметики в курс алгебры, [не] приведя существенных доводов.

И. Н. Ульянов раскрыл педагогическому совету ошибочность такого предложения. Изучение этого раздела в курсе арифметики дает возможность не только применять известные правила к решению арифметических задач, но служит пропедевтическим, подготовительным курсом к слушанию алгебры и геометрии. Непрерывные пропорции, утверждал он, дают ключ к пониманию действий возведения в степень и извлечения квадратного корня. Принять предложение Познякова — значит перейти на формальный путь изучения отношений и пропорций[4].

Учитель математики А. Мукосеев поддерживал И. Н. Ульянова. «Учащиеся скорее поймут меня, — говорил он, — когда им скажу: во сколько раз 6 более 3, во столько раз 8 более 4 и напротив, они вовсе меня не поймут, когда им скажешь: $a : в = c : d$. Всякий из них сейчас же спросит: да что это такое a, $в$, c и d; тогда придется отложить метод г. Познякова и написать вместо букв цифры — придется в классе алгебры проходить арифметику»[5]. Мнение И. Н. Ульянова и А. Мукосеева разделяло большинство членов педагогического совета.

В четвертом классе из трех недельных уроков математики один отводится для алгебры и два для геометрии. В алгебре изучали уравнения первой степени, возведение во вторую степень, извлечение квадратных корней и уравнения второй степени. Геометрию И. Н. Ульянов предлагал изучить до пропорциональных линий (до подобия фигур).

А. Шапошников предлагал иную разбивку часов: один урок в неделю алгебры и два геометрии в первом полугодии, а во втором — наоборот. Такое распределение уроков он вновь объяснял новизною геометрии. По мнению А. Шапошникова, в четвертом классе следует проходить лонгиметрию, планиметрию и стереометрию без подробностей, лишь главные теоремы и те без научно строгих доказательств, разбирая их только на примерах. Многие преподаватели того времени считали, что если учащиеся усвоили известное количество формул, теорем без их доказательства, решили некоторое число задач, то они уже получили необходимое математическое образование. Такое узкое понимание цели математического образования

---

[4] Государственный архив Горьковской области (ГАГО), ф. 505, оп. 408в, ед. хр. 1, л. 23.

[5] ГАГО, ф. 505, оп. 407, ед. хр. 1114, л. 52.

приводило к тому, что большинство учителей того времени требовали от учащихся простого запоминания учебника и слов учителя, т. е. зубрежки. Илья Николаевич ясно сознавал, что такой метод преподавания убивает в учащихся всякую инициативу, самодеятельность, стремление предложить оригинальные ответы на вопросы, поставленные учителем. И он боролся против этого. «Преподавать геометрию, — настаивал он, — можно только в систематическом порядке, почему нельзя согласиться с требованиями, чтоб ученики 4-го класса закончили всю геометрию»[6].

В пятом классе И. Н. Ульянов отводил один урок в неделю для алгебры и два для геометрии в течение всего учебного года. По алгебре изучали бином Ньютона, возвышения и извлечения с различными показателями, по геометрии всю планиметрию до стереометрии. Шапошников начинал свой курс геометрии опять сначала и доводил его также до стереометрии. Он занимался явным дублированием курса геометрии четвертого класса. Такое поверхностное изучение геометрии, по мнению Ильи Николаевича, приносило больше вреда, чем пользы.

В шестом классе И. Н. Ульянов предлагал проходить прогрессии и логарифмы и заканчивать геометрию, причем для алгебры назначал один урок в неделю в продолжение всего года, а для геометрии два в первое полугодие. Он считал необходимым изучить еще половину тригонометрии, на которую во второе полугодие определял два урока. Шапошников же предлагал всю тригонометрию проходить в седьмом классе.

В седьмом классе на математику отводилось три урока в неделю. В первом полугодии Илья Николаевич заканчивал тригонометрию, а во втором занимался повторением всего гимназического курса математики[7]. Совет принял программу И. Н. Ульянова.

Для выполнения программы И. Н. Ульянов большое внимание уделял подбору учебно-методической литературы как для учащихся, так и для учителей. На одном из педагогических советов гимназии он говорил, что необходимо наиболее полно комплектовать книгами ученические библиотеки потому, что имеющиеся книги «не всег-

[6] ГАГО, ф. 505, оп. 408в, ед. хр. 1, л. 26.
[7] Там же, л. 23—28.

да удовлетворяют любознательности учащихся, по ограниченности и специальности выбора»[8]. Он отбирал лучшие по тому времени учебники и учебные пособия как русских, так и зарубежных авторов.

С особым удовольствием, с большим пониманием школьного дела Илья Николаевич выполнил составление программ по математике, физике, космографии и естественной истории для реальной гимназии. К этому времени (15 февраля 1865 г.) еще не был решен вопрос о том, какой будет Нижегородская гимназия реальной или классической.

Увеличение числа уроков на изучение математики в реальной гимназии по сравнению с классической незначительно, тем не менее программы существенно отличаются как по объему, так и по содержанию. В реальных гимназиях большее внимание уделялось устному и письменному решению задач, применению теоретических положений к практическим потребностям.

Программу по математике для реальной гимназии И. Н. Ульянов предлагал следующую.

В первом классе, как и в классической гимназии, назначалось три урока в неделю для арифметики. Программа: «Четыре действия над простыми и составными целыми числами; ученики упражняются в счислении на счетах, устных вычислениях и задачах»[9].

Во втором классе в четыре недельных урока (против трех в классической гимназии), предполагалось пройти: дроби и их свойства, четыре действия над простыми и десятичными дробями, обращение простых дробей в десятичные и наоборот, периодические и непрерывные дроби, отношения и их свойства, вычисления на счетах, устные вычисления и задачи.

Как видим, программа второго класса реальной гимназии значительно шире по объему, чем в классической. В расположении учебного материала соблюдена строго научная последовательность. В этом классе Илья Николаевич давал первоначальные понятия о непрерывных дробях и возвращался к ним в курсе алгебры шестого класса, где излагал их на научной основе.

В третьем классе изучались арифметика, алгебра и геометрия. Недельные часы на них распределялись сле-

[8] ГАГО, ф. 505, оп. 407, ед. хр. 1059, л. 20.

[9] ГАГО, ф. 522, оп. 459, ед. хр. 84, лл. 40—44.

дующим образом. В первое полугодие для арифметики отводился один урок, во второе—два; для алгебры в первое полугодие — два урока, во второе — один; для геометрии в первое полугодие — один урок, во второе — два. Такое распределение уроков позволяло И. Н. Ульянову сообщить учащимся в первом полугодии сведения из алгебры, необходимые для плодотворного изучения геометрии.

Программа арифметики: пропорции и их свойства, применение пропорций к задачам тройного правила, правила товарищества и правила смешения, решение тех же задач по способу приведения к единице, вычисления на счетах, устные вычисления, задачи и письменное изложение их решений.

Программа алгебры: предварительные понятия, первые четыре действия над алгебраическими количествами, упражнения на примерах.

Программа геометрии: предварительные понятия об углах и треугольниках, о перпендикулярах и прямоугольных треугольниках, теория параллелей, круг и измерение углов, измерение прямолинейных площадей, площадь круга, задачи.

В четвертом классе для математики планировали четыре урока в неделю. Изучали алгебру и геометрию. Для каждого предмета назначали по два урока в продолжение всего года.

Программа алгебры: решение уравнений первой степени с одним, двумя и несколькими неизвестными; возвышение в квадрат и куб численных и алгебраических количеств; извлечение квадратных и кубических корней из числовых и алгебраических количеств; решение квадратных и кубических уравнений (двучленных); задачи и письменное изложение их решений. Повторение всего пройденного по арифметике и алгебре.

Важно отметить, что при изложении материала об извлечении квадратных и кубических корней Илья Николаевич сначала объяснял извлечение корней из чисел, а потом переходил к извлечению корней из алгебраических выражений. Тогда как в большинстве учебников того времени изложение этого вопроса велось в обратном порядке.

Программа геометрии: понятие о плоскостях и о положении прямой в пространстве, о плоских углах и их измерении, о многогранных углах и их свойствах, о многогранниках и их измерении, задачи и письменное изло-

жение их решений. Повторение всего пройденного по геометрии. Очень интересны и глубоки по содержанию программы по математике, составленные И. Н. Ульяновым для пятых и шестых классов реальной гимназии.

В пятом классе из четырех уроков в неделю он назначал в первое полугодие по два на алгебру и геометрию, во второе полугодие—по одному уроку для алгебры и геометрии и два для тригонометрии.

Программа алгебры: переложения, сочетания и соединения, формула бинома Ньютона, возвышения и извлечения, радикальные количества, алгебраические действия над ними, логарифмы и применение их к решению задач. Задачи и письменное изложение их решений.

Программа геометрии: о пропорциональных линиях и подобии фигур, об измерении круга и его частей, задачи с письменным изложением их решения. Повторение лонгиметрии и планиметрии. Программа тригонометрии: теория тригонометрических линий, решение треугольников, задачи и письменное изложение их решений.

В шестом классе назначено три урока в неделю. Для алгебры один урок в неделю в первом полугодии и два во втором. Остальные уроки для геометрии.

Программа алгебры: прогрессии, формула Ньютона с дробными и отрицательными показателями, понятие о строках, понятие о формулах и функциях, непрерывные дроби и решение неопределенных уравнений первой степени, понятие о косоугольных координатах и применение их к черчению решений неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя и тремя неизвестными, исследование главнейших свойств конических сечений. Задачи и письменные упражнения в изложении математических вопросов. Программа геометрии: о симметричности и подобии многогранников, о сфере и сферических фигурах, конус, цилиндр и шар. Задачи, письменные упражнения и повторение всей стереометрии.

В седьмом классе на математику было определено три урока в неделю. В продолжение всего учебного года И. Н. Ульянов занимался повторением всего гимназического курса математики[10].

В результате детального обсуждения программ по математике, составленных И. Н. Ульяновым, «члены Соединенного педагогического совета 15 февраля 1865 года

[10] ГАГО, ф. 522, оп. 459, ед. хр. 84, лл. 40—44.

приняли эти программы для реальных гимназий, одобрили и отметили удовлетворительное решение вопроса»[11].

Программы И. Н. Ульянова по математике носят глубоко научный характер. Все разделы элементарной математики представлены в них достаточно полно, все они находятся в тесной связи друг с другом. Изучение всего курса предполагается вести в строго систематическом порядке. Такое изучение математики дает прочные знания учащимся и обеспечивает хорошую подготовку их к дальнейшему изучению математической науки. По тому времени это была смелая, прогрессивная постановка вопроса в распределении учебного материала по годам обучения для реальных гимназий.

Обращает на себя внимание то, что в программах И. Н. Ульянова имеется специальный раздел «формулы и функции». Это позволяет нам думать, что Илья Николаевич серьезно занимался изучением функций, заданных формулами, и функциональной зависимости. Надо заметить, что вопрос об изучении функциональной зависимости не нашел окончательного решения в наших школах и по сей день.

Серьезное внимание при преподавании математики И. Н. Ульянов уделял графическому решению уравнений вообще и решению неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя и тремя неизвестными. Он понимал, что навыки графического решения уравнений имеют большое практическое значение.

Илья Николаевич смело включал в школьный курс элементы высшей математики, а именно: исследование конических сечений по их уравнениям, сферическую геометрию и другие.

Изучение программы по математике, включающей такие вопросы, в среднем учебном заведении возможно только под руководством опытного преподавателя, имеющего высокую научно-методическую подготовку.

На том же заседании Соединенного педагогического совета И. Н .Ульяновым были предложены программы по физике для классической и реальной гимназий. Физика в обеих гимназиях, по уставу 1864 года, проходилась в пятых-седьмых классах. Разница состояла лишь в числе недельных уроков. В каждом классе реальной гимназии

---

[11] ГАГО, ф. 522, оп. 459, ед. хр. 84, лл. 40—44.

на физику отводилось на один урок больше, чем в классической.

Программу физики для реальных гимназий Илья Николаевич предлагал следующую.

Программа пятого класса: Понятие о естественных науках. Место, занимаемое физикой в ряду естественных наук. Общие свойства тел, отличительные свойства физических и химических тел. Сложение и разложение сил. Центр тяжести. Простые машины. Рычаг и применение его к весам. Блок, ворот и зубчатые колеса. Наклонная плоскость, клин и винт. Действие внутренних сил на твердые тела. О сцеплении, твердости и упругости. Гидростатика. Равновесие капельно жидких тел. Равновесие твердых тел, погруженных в жидкости. Закон Архимеда и применение его к определению удельного веса тел. Ареометры с постоянным весом и с постоянным объемом. Явления прилипания. Давление атмосферного воздуха. Барометр. Воздушный шар[12].

Программа шестого класса: Движение, звук, теплота и свет.

Программа седьмого класса: Магнетизм, электричество и гальванизм. Кроме того, в этом классе повторяется весь курс физики[13].

При обсуждении программы по физике Илье Николаевичу пришлось выдержать упорную борьбу против сторонников формального обучения. А. Шапошников утверждал, что «программа по физике относительно числа статей должна быть одинаковой как для классических, так и для реальных гимназий. Разница должна заключаться только в выполнении самой программы: в больших или меньших подробностях предмета, почему в классической гимназии следовало бы, как и в реальной, оптику отнести к шестому классу»[14]. (В классической гимназии оптика изучалась в седьмом классе).

И. Н. Ульянов не соглашался с А. Шапошниковым. Он говорил, что если в реальной гимназии на физику отводится больше часов, чем в классической, то и объем содержания физики в реальной гимназии должен быть большим, чем в классической. Физика, как и математика,

---

[12] Центральный партийный архив института марксизма-ленинизма (ЦПА, ИМЛ), ф. 11, оп. 1, ед. хр. 27, л. 9.

[13] ГАГО, ф. 522, оп. 459, ед. хр. 84, лл. 40—44.

[14] Там же.

должна преподаваться в строго систематическом поря ке. Кроме того, изучение физики должно идти в нерг рывной связи с изучением математики потому, что о обслуживает физику своим математическим аппарато В свою очередь данные физики Илья Николаевич и пользовал при составлении математических задач. П этому он не соглашался с А. Шапошниковым о перено оптики из седьмого класса классической гимназии в ш стой. На замечания А. Шапошникова он заявил, что «о тика требует знания тригонометрии, а она в классич ской гимназии проходится только в седьмом классе»[15]. П этому, как мы говорили ранее, И. Н. Ульянов настаива на изучении тригонометрии именно в шестом классе и классических гимназиях, а Шапошников, отнеся тригон метрию к седьмому классу, а раздел оптики к шестом как говорится, сам себя высек. Он показал пример бе думного, формального отношения к составлению прс грамм и обучению.

Несостоятельным было и требование Шапошников чтобы в классических гимназиях при меньшем количес ве уроков проходился весь материал реальной гимнази но с меньшими подробностями. Такое изучение материа ла, по мнению И. Н. Ульянова, приучает ум учащихс к лености, тогда как учитель должен стремиться всем силами возбудить в нем постоянную деятельность. Лучш основательное изучение наиболее важных вопросов и раз делов, чем поверхностное рассмотрение всех статей фи зики, считал он.

Педагогический совет утвердил программы по физик для реальных и классических гимназий, предложенны И. Н. Ульяновым.

В качестве учебников и учебных пособий по физик Илья Николаевич рекомендовал книги Ленца, Жамена Дагена, Писаревского, Любимова, Криста и Шиллера При подготовке к урокам он не ограничивался имеющи мися учебниками по физике на русском языке, а доволь но часто «занимался переводами различных статей и физики и космографии... статей из астрономии Делоне с целью пополнить этими статьями некоторые отделы и математической географии»[16].

Весьма примечательно, что Илья Николаевич широк

---

[15] ГАГО, ф. 522, оп. 459, ед. хр. 84, лл. 40—44.
[16] ЦГА ТАССР, ф. 92, оп. 1, ед. хр. 8709, л. 34.

использовал физические опыты. Творческая подготовка к урокам, проведение их на высоком научном и методическом уровне приносили положительные результаты. Ответы учащихся его классов на уроках и на экзаменах «отличались жизнью, полною положительных знаний и разумно усвоенного понимания всего пройденного»[17].

На преподавание космографии отводилось по одному недельному уроку в седьмом классе и в классической и в реальной гимназиях. При таком малом количестве уроков нужна была особо тщательно продуманная программа. И. Н. Ульянов для реальной гимназии предлагал изучить:

1. Понятие о горизонте, вертикальных линиях, плоскостях, странах света, меридиане и шаровидности земли. О небесном своде и его освещении. О преломлении лучей света в атмосфере. О видимом суточном движении неба. Полюсы и ось мира. Экватор.

2. Углы, определяющие видимые места светил:

а) относительно горизонта и меридиана (высота и азимут);

б) относительно экватора и меридиана (склонение и часовой угол). Небесная сфера. Верхняя и нижняя кульминация. Каким образом из наблюдений выводятся географические широты и долготы мест, а также склонение звезд. Об истинной фигуре Земли.

3. Годовое движение Солнца. Эклиптика. Точка равноденствия и состояния. О планетах. Системы мира. Системы Птоломея и Коперника.

4. О Луне и ее движении. Фазы Луны. Лунный месяц. О лунных и солнечных затмениях. Понятие о кометах. Понятие о звездах и звездах переменных. Понятие о Млечном Пути и туманных пятнах.

5. О материках. Острова континентальные, морские и коралловые.

6. О морях. Постоянство уровня, глубина, соленость, прозрачность, сверкание, температура и замерзание воды в океане. Движение воды в океанах. Приливы и отливы, течения и волны в океане.

7. Об источниках и реках. Происхождение ключевой воды, течение воды во внутренности Земли, периодические источники, температура ключей, минеральные воды, происхождение минеральных ключей. Реки. Изменения в

---

[17] ЦГА ТАССР, ф. 92, оп. 1, ед. хр. 8726, л. 45.

уровне реки; верхняя, средняя и нижняя река. Озера и болота.

8. О вулканических явлениях. Землетрясения. Связь между землетрясением и вулканическими явлениями. Образование новых вулканов и островов. Вулканы. Явления при спокойном состоянии вулканов. Вулканические извержения. Лава. Ложные вулканы.

9. Явления теплоты на земной поверхности. Суточные и годичные изменения температуры; уменьшение температуры с увеличением высоты, снежная линия, глетчеры. Температура на различных глубинах внутри Земли.

10. О ветрах. Направление и скорость ветра. Пассаты, муссоны и береговые ветры, ураганы и смерчи. Свойства ветров.

11. Водяные метеоры. Понятие о влажности воздуха. Туман и облако. Разные виды облаков. Дождь и снег. Роса и иней.

12. Электрические метеоры. Гроза. Действия удара молнии и громовые отводы. Град.

13. Оптические метеоры. Голубой цвет неба. Рефракция. Зеркальность воздуха. Радуга[18].

Кроме этого, И. Н. Ульянов советовал коллегам на уроках космографии изучать статьи из математической географии о паралаксе светил, об аберрации, а из физической географии краткое изложение метеорологии вообще и климатологии России. Он высказал мнение о том, что желательно было бы присоединять изучение местной климатологии, но недостаток метеорологических данных для большей части мест делает исполнение этого желания почти невозможным.

Статью «О строении земной коры» он советовал перенести в курс естественной истории».

После выступления И. Н. Ульянова и некоторых замечаний преподавателя естественной истории В. А. Ауновского программа по космографии была утверждена.

Из приведенной программы видно, что Илья Николаевич на уроках космографии сообщал учащимся весьма солидные сведения по астрономии и географии. Преподавание космографии он осуществлял в тесной связи с математикой и физикой. Программы И. Н. Ульянова по математике, физике и космографии были прогрессивными

---

[18] ЦПА ИМЛ, ф. 11, оп. 1, ед. хр. 27, л. 14.

шагом в обучении, шагом, ломающим старые схоластические устои русской школы.

Преподавал И. Н. Ульянов живо и интересно, его уроки отличались ясностью и точностью изложения, разнообразием форм работы с учащимися. На каждом занятии он умел выделить главное, существенное, которое необходимо было усвоить и запомнить учащимся, ибо это давало им возможность самостоятельно разбираться в ряде новых явлений и фактов, с которыми в дальнейшем приходилось встречаться.

Характеризуя занятия И. Н. Ульянова по физике и космографии, попечитель Казанского учебного округа отмечал: «При преподавании первого предмета, г. Ульянов в минувшем (1868 г.—**Ф. К.**), году, как и в прежние годы, старался выводить законы из опытов, каковой путь он находил всегда гораздо доступнее учащимся, нежели обратный ход дела. Само по себе разумеется, что пользование этим путем всегда становилось в зависимость... от достатка нужных инструментов.

Принятие в минувшем году нового учебника по преподаванию космографии, именно Малинина и Буренина (его рекомендовал совету И. Н. Ульянов.—**Ф. К.**), вместо космографии Савича и физической географии Ленца, дали г. Ульянову возможность лучше выполнить задачу преподавания этого предмета в гимназии при одном уроке в неделю»[19].

В одном из отчетов директора Нижегородской гимназии дается подробная характеристика приемов, которыми пользовался И. Н. Ульянов при преподавании физико-математических дисциплин. В нем говорится, что Илья Николаевич не учил учеников, не преподавал им, а как будто вместе с ними работал и общими силами добывал те или другие сведения. Методом самостоятельных ученических работ, направляемых опытной, искусной рукой преподавателя, и методом наведения вопросами на ту или другую истину владел он в полном блеске. Вот, например, описание одного из уроков И. Н. Ульянова: «В особенности любопытно было следить за процессом, позволю себе выразиться так, добывания им в детских головах разумения того, чем отличаются минералы от метал-

---

[19] ЦГА ТАССР, ф. 92, оп. 1, ед. хр. 9485, л. 264. Есть в кн.: Б. В. Болгарский. Казанская школа математического образования. Казань, 1967, стр. 105.

лов: в детских умах строились разные предположения, в процессе мыслительной их деятельности были разные уклонения от данного предмета; преподаватель собственными же их знаниями обнаруживал слабые основания их предположений, искусными вопросами наводил их на нить данного вопроса, в то же время постепенно и незаметно прокладывал им более и более дорогу к окончательному его решению. Весь класс был в движении, в работе, в деятельности»[20]. Эти документы говорят о многом.

Глубоко преданный школьному делу, способный понять душу ребенка, знающий индивидуальные особенности каждого ученика, умеющий преодолевать любые трудности в процессе обучения и воспитания, Илья Николаевич мог создать в классе атмосферу взаимного доверия, условия для творческой самостоятельной работы учащихся. На его уроках царствовали серьезность, ласковость, справедливость, доброта, порядок, и, самое главное, постоянная разумная деятельность. Вследствие этого И. Н. Ульянов завоевывал безграничное доверие и искреннюю любовь своих учеников.

Педагогическое мастерство Ильи Николаевича высоко ценило начальство по службе. В отчете за 1868 год директор Нижегородской гимназии писал: «Ульянов, уже снискавший не только в гимназической корпорации, но и во мнении окружного начальства известность преподавателя отличного и педагога, с достоинством продолжает занимать принадлежащее ему место между лучшими учителями Нижегородской гимназии. Его мягкое и симпатичное обращение с воспитанниками, его всегда ровный и благоразумный такт привлекают к нему учеников, весьма редко доводящих его до каких-либо классных взысканий и никогда — до жалоб начальству... Преподавание г. Ульянова отличается ясным и толковым изложением предмета, его светлым пониманием общеобразовательности математики и тем терпеливым вниманием, которое заставляет его выслушивать всякое недоумение или затруднение учеников, менее развитых и слабых, и доводить их до полного усвоения преподаваемого»[21].

Эта краткая характеристика весьма выразительна.

---

[20] ЦГА ТАССР, ф. 92, оп. 1, ед. хр. 8832, л. 121.
[21] ЦГА ТАССР, ф. 92, оп. 1, ед. хр. 9485, л. 261.

Приведенные в статье документы позволяют сделать вывод, что в лице Ильи Николаевича Ульянова Россия имела выдающегося прогрессивного педагога-методиста. Многие его педагогические и методические идеи созвучны сегодняшней советской школе, поэтому знакомство с ними необходимо и полезно для учителей.

С. Г. ПЕРВУХИНА

РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В IV—VIII КЛАССАХ

Развитие творческой активности учащихся всегда было одной из главных задач советской школы. Но никогда еще эта проблема не приобретала столь большого значения, как в наши дни. При современном стремительном росте науки, широком потоке научной информации особенно важно вооружить школьников такими методами работы, пользуясь которыми, они могли бы не только запоминать и усваивать готовое, но и самостоятельно «добывать» знания.

Анализ опыта работы передовых учителей убеждает в том, что наибольший педагогический эффект в развитии творческой активности учащихся IV—VIII классов дает исследовательский метод установления математических закономерностей, а также решение задач, активизирующих познавательную деятельность школьников.

Об этих методах обучения и пойдет речь в данной статье.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ предполагает постановку проблемы перед учащимися и ее решение. При этом решение проблемы как бы «проходит» три стадии: 1) создание гипотезы (или по аналогии с ранее изученным, или в процессе наблюдения, или рассмотрения нескольких специально подобранных упражнений); 2) эксперимент, подтверждающий насколько состоятельна выдвинутая гипотеза; 3) обработка данных эксперимента, теоретическое обоснование их.

Исследовательский метод особенно эффективен при доказательстве таких теорем, где логика гипотез проста,

почти очевидна, и эксперимент не заслоняет, а подчеркивает необходимость логического обоснования полученных экспериментальным путем выводов.

При доказательстве теорем исследовательским методом проблемная ситуация создается формулировкой теоремы в вопросительной форме, а не в виде условного суждения. Этот метод дает простор самостоятельной мысли учащихся. Предлагаемые ими доказательства часто отличаются от тех, что содержатся в стабильном учебнике. Например, при доказательстве теоремы о свойстве средней линии трапеции высказанная учениками гипотеза подтверждается экспериментально. При самостоятельном выполнении эксперимента (лабораторной работы) большинство учащихся разбивает трапецию на два треугольника и только отдельные из них преобразуют ее в равновеликий треугольник (как это сделано в учебнике геометрии Н. Н. Никитина). Выполняя построения чертежа в процессе лабораторной работы, учащиеся убеждаются в необходимости логического обоснования (доказательства) полученных экспериментальных выводов. В первом случае следует доказать, что средние линии составляющих трапецию треугольников, образуют среднюю линию трапеции (рис. 1), во втором случае — равенство треугольников (рис. 2).

Доказательство теорем исследовательским методом создает естественные условия для варьирования чертежей. Тем самым достигается общность обоснования полученного вывода.

Несмотря на высокий педагогический эффект, иссле-

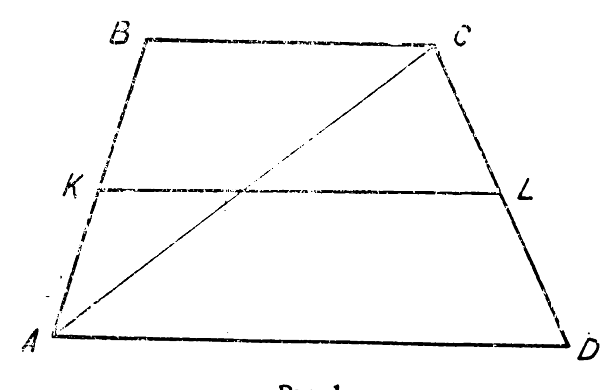


Рис. 1

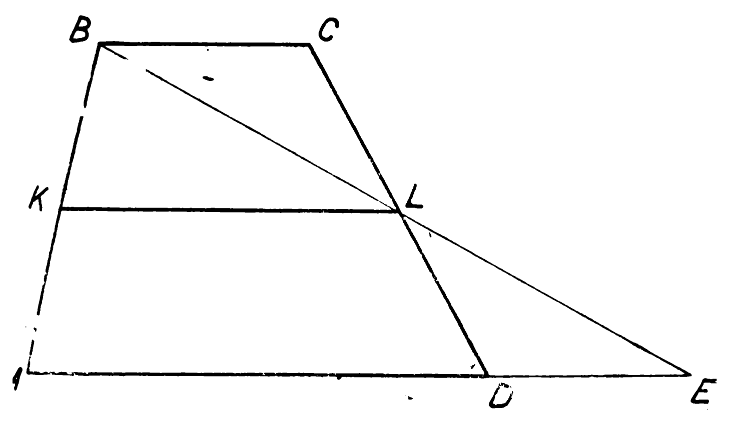


Рис. 2

дователький метод не может быть универсальным, так как он требует значительного времени и не всегда теоретическая подготовка учащихся позволяет им дать логическое обоснование выводам, полученным при эксперименте. Однако отдельные стадии этого метода могут и должны найти применение, например эксперимент в виде лабораторных работ, связанных с графическими построениями, измерениями и вычислениями.

Так, теоретическая подготовка пятиклассников позволяет вывести формулу площади круга только экспериментальным путем. Учитель предлагает подумать о возможной структуре формулы, выражающей зависимость площади круга от радиуса. Учащиеся на основе таких знаний, как зависимость длины окружности от радиуса и площади геометрической фигуры, от ее линейных размеров выдвигают гипотезу: формула площади круга должна будет выражаться через квадрат радиуса».

По плану подтверждающего гипотезу эксперимента или фронтальной лабораторной работы учащиеся должны начертить на миллиметровой бумаге три концентрические окружности радиусами в 1 см, 3 см и 6 см; затем сосчитать (приближенно) число квадратных сантиметров в каждом из получившихся кругов, определить путем вычислений характер изменения площади круга в зависимости от изменения радиуса и сделать вывод.

Запись результатов лабораторной работы:

Значения: радиуса R (в см)	Значения: площади круга (приближенные) S (в кв. см)	Характер изменения площади круга в зависимости от изменения радиуса: $\frac{R_n}{R_1}$	$\frac{S_n}{S_1}$
1	3	1	$1 = 1^2$
3	26	3	$8{,}67 \approx 9 = 3^2$
6	108	6	$36 = 6^2$

Вопросы, подготавливающие учащихся к индуктивному умозаключению по результатам эксперимента:

1. Найдите площадь круга, радиус которого равен 2 см, 4 см и 5 см, зная площадь круга с радиусом 1 см.

2. Напишите формулу площади круга и сравните ее с формулой длины окружности.

При экспериментальном методе обучения исключительно большое значение должно придаваться созданию **проблемной ситуации,** что является важнейшим средством побуждения школьников к активной умственной деятельности. Проиллюстрируем сказанное на лабораторной работе по установлению свойства отрезка, соединяющего концы ломаной.

В ходе работы учащимся предлагается изобразить две точки (M и N). Соединить M и N отрезком и двумя ломаными линиями. Число звеньев каждой ломаной произвольное, но не более пяти (для простоты выполнения работы).

Затем перед учащимися ставится проблема: «Представьте, что из пункта M в пункт N идет пешеход. По какому пути должен идти пешеход, чтобы быстрее попасть в пункт N (скорость движения одна и та же)?».

Учащиеся высказывают гипотезу: «Пешеход должен идти по пути, изображенному отрезком». В верности своего предположения они убеждаются путем измерений и вычислений (с учетом масштаба 1 см — 1 км). При выполнении измерения обращается внимание учеников на правильность его выполнения и на приближенный характер результатов.

Примерная запись в тетрадях:

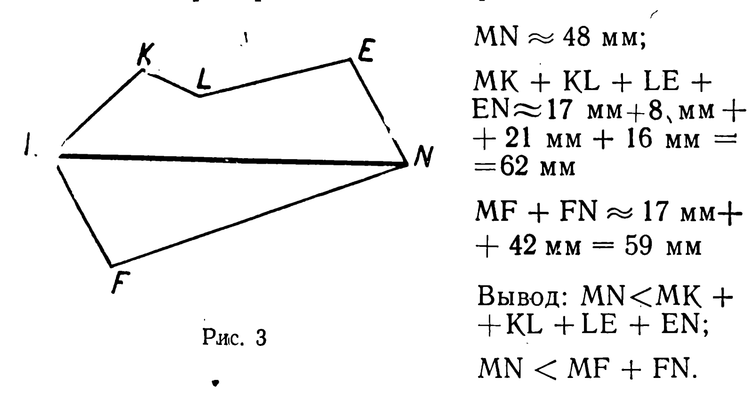


Рис. 3

$MN \approx 48$ мм;

$MK + KL + LE + EN \approx 17$ мм $+ 8$ мм $+$ $+ 21$ мм $+ 16$ мм $=$ $= 62$ мм

$MF + FN \approx 17$ мм $+$ $+ 42$ мм $= 59$ мм

Вывод: $MN < MK +$ $+ KL + LE + EN$;

$MN < MF + FN$.

Для уточнения формулировки вывода перед учениками ставится еще одна проблема: «Всегда ли отрезок прямой короче ломаной?». Предлагаемые ответы иллюстрируются рисунками. И только после того, как найдено правильное решение, формулируется вывод: отрезок прямой, соединяющий концы ломаной, короче этой ломаной или: кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется отрезком, соединяющим эти точки.

При проведении эксперимента важно помочь учащимся отыскать все существенные признаки нового понятия. Примером такого подхода может служить лабораторная работа на установление свойств точек, симметричных относительно прямой (введение понятия точек, симметричных относительно оси).

На листе бумаги ученики проводят произвольную прямую, перегибают лист по этой прямой, прокалывают его в том или ином месте и распрямляют. Затем определяют, как расположены полученные от прокола точки относительно произвольной прямой. Необходимый вывод получается в результате анализа ответов учащихся.

Устанавливается, что точки обладают следующими свойствами: 1) расположены по разные стороны относительной прямой; 2) лежат на одном перпендикуляре к ней; 3) находятся на равных расстояниях от прямой.

Далее сообщается, что такие точки называются симметричными относительно прямой.

Исследовательский подход к изучению теоретического материала позволяет рассматривать взаимосвязанно

многие вопросы школьной программы. Например, учащимся IV класса становится более понятной необходимость изучения законов арифметических действий, если они выводятся в процессе решения задач. Изложение этих законов целесообразно связывать с вычислением периметра и площади прямоугольника, объема прямоугольного параллелепипеда.

В вычислительной практике переместительный закон обычно применяется одновременно с сочетательным. Эту идею следует использовать при подведении учеников, к формулировке названных законов на основе решения к примеру, такой задаче: «Начертите прямоугольник со сторонами 34 мм и 41 мм и вычислите его периметр».

При вычислении периметра учащиеся предлагают различный порядок записи слагаемых, что позволяет получить требуемый вывод.

Примерная запись на доске и в тетрадях:

1. Р = (34 + 41) + (34 + 41) = 150 (мм);
2. Р = (41 + 34) + (41 + 34) = 150 (мм);
3. Р = 34 + 34 + 41 + 41 = 150 (мм);
4. Р = 34 · 2 + 41 · 2 = 150 (мм);
5. Р = (34 + 41) · 2 = 150 (мм).

В ходе анализа записей отмечается различный порядок расположения слагаемых, сравнительная легкость вычислений в первом, втором и пятом случаях. Результаты рассуждений находят отражение в записи:

Применение

34 + 34 + 41 + 41 = 34 + 41 + 34 + 41 = (34 + 41) + (34 + 41)

переместительного *сочетательного*

переместительного и сочетательного законов сложения

Из полученных записей непосредственно вытекает возможность формулировать распределительный закон умножения. Выводу переместительного закона умножения посвящается урок на вычисление площади прямоугольника.

Таким образом, из решения по сути дела одной геометрической задачи выводятся четыре закона арифметических действий.

Благодаря лабораторным работам, связанным с геометрическими построениями, измерениями и вычислениями, то есть благодаря содержательному и доходчивому индуктивному обоснованию фактов, обеспечивается более глубокое и прочное усвоение изучаемого материала уже на раннем этапе обучения.

«Наиболее распространенный дефект преподавания математики (еще и сегодня) заключается в том, что учащимся сообщаются в отвлеченной форме некоторые правила; эти правила заучиваются и служат затем для учащихся руководством к действию. Причем учащиеся не сознают ни происхождения этих правил («почему так нужно действовать»), ни назначения выполняемых операций («зачем нужно так действовать»[1]). Сказанное относится к изучению всех разделов математики. Поэтому очень важно, чтобы методы и приемы обучения соответствовали цели урока, его содержанию и возрастным особенностям учащихся.

Например, широкое использование графических иллюстраций значительно облегчает усвоение многих алгебраических понятий. Чертежи различных геометрических фигур являются самым доступным материалом, при рассмотрении которого появляется естественная необходимость в составлении формул, в нахождении значения выражения с переменными и во введении понятия «допустимые значения букв». Неоднозначность структуры формул, выражающих зависимость геометрических величин для одной и той же фигуры, можно использовать для введения понятия тождественные преобразования выражений.

Составляя формулы на знакомом и близком материале, учащиеся быстрее овладевают умением пользоваться ими, то есть умением составлять и читать их, делать числовые подстановки.

Представление о возможностях применения чертежей при рассмотрении тождественных преобразований может дать описание урока в VI классе на тему «Произведение одночлена и многочлена».

---

[1] Гончаров В. Л. Математика, как учебный предмет. Известия АПН РСФСР, вып. 92, стр. 51.

Выводу правила предшествует повторение распределительного закона умножения на следующих упражнениях: $\left(6\frac{1}{5}+10{,}4\right)\cdot 5$; $\left(1\frac{3}{4}+2\frac{5}{6}\right)\cdot 12$.

После этого всеми учащимися выполняются такие задания: воспроизвести в тетради чертеж, сделанный учителем на доске (рис. 4); обозначить на нем размеры, позволяющие определить площади прямоугольников ABCD и AEFD; составить формулы площадей и вычислить их по результатам измерений с точностью до 0,1 см.

В ходе обсуждения итогов лабораторной работы оказывается, что учащиеся дают два варианта обозначений размеров и соответственно им составляют формулы площадей прямоугольников.

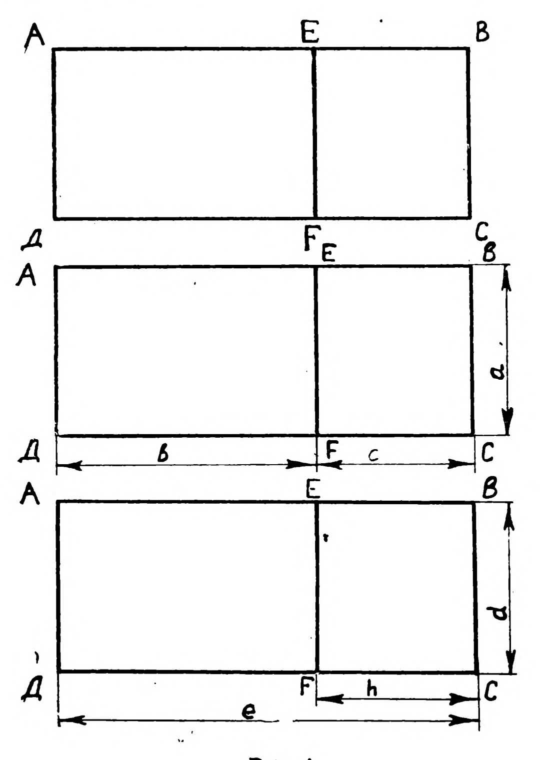


Рис. 4

Записи по результатам работы:

Формулы площадей прямоугольников

ABCD		AEFD	
$S=(в+c)\cdot a$ $S=aв+ac$	(1)	$S=aв$	
$S=ed$		$S=d(e-h)$ $S=de-dh$	(2)

Отсюда: $a\ (в+c)=aв+ac$; $d\ (e-h)=de-dh$.

По форме записи умножения одночлена и многочлена учащиеся устанавливают аналогию этого вида тождественного преобразования с распределительным законом умножения, что позволяет сформулировать правило выполнения этого преобразования.

Правильность сделанного вывода следует подтвердить вычислением площади каждой фигуры по обеим формулам.

Рассмотренный случай использования графических иллюстраций при изучении алгебры связан с переходом: графический образ → формула. Однако возможен обратный переход: формула → графический образ, например, при выводе формулы $(a+в)^2$. Главная цель использования чертежа — обеспечить сознательное восприятие формулы, предупредить ошибку — замену квадрата суммы двух чисел суммой их квадратов.

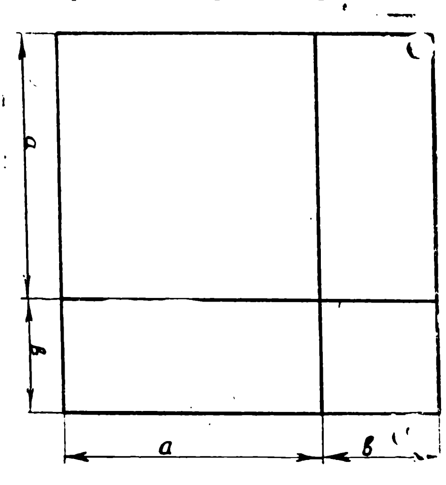


Рис. 5

Формула $(a+в)^2$ выводится в результате выполнения лабораторной работы, в ходе ко-

торой учащиеся строят квадрат со стороной, равной сумме отрезков a и $в$, разбивают этот квадрат на прямоугольники и квадраты с измерениями, соответственно равными a и $в$ (рис. 5). Затем выражают площадь исходного квадрата (со стороной $a+в$) через площади составляющих его фигур и записывают формулу:

$$(a+в)^2=a^2+ав+ав+в^2=a^2+2ав+в^2;$$
$$(a+в)^2=a^2+2ав+в^2.$$

Правильность выведенной формулы каждый ученик подтверждает вычислениями по результатам измерений.

Применением геометрических образов на уроках алгебры достигается решение многих учебных задач: сознательное усвоение первых понятий алгебры; функциональный подход к изучению алгебраических выражений; закрепление знаний по геометрии; формирование чертежно-графических, измерительных и вычислительных навыков.

Итак, в результате выполнения графических, измерительных и вычислительных работ формируются новые понятия, выводятся правила, «открываются» свойства геометрических фигур. Выполняя описанные задания, ученики убеждаются в том, что теоремы, определения, формулы являются продуктом человеческой практики.

Следует заметить, что экспериментально-исследовательский метод оказывает положительное влияние на развитие таких компонентов познавательной деятельности школьников, как наблюдательность, внимание, воображение и т. д.

Немалую роль в обучении математике играют ЗАДАЧИ, АКТИВИЗИРУЮЩИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ. Конечно, решение любой задачи в той или иной степени активизирует мыслительную деятельность. Однако необходимо подбирать и составлять такие задачи, решение которых развивает познавательную деятельность школьников наилучшим образом. Это — задачи, создающие поисковые ситуации.

Например, упражнение: «Показать, что график уравнения у=2х может быть получен из прямой у=х путем удвоения ординат ее точек», целесообразнее дать в следующей редакции: «Прямую у = х преобразовать в прямую, ординаты точек которой в два раза больше ординат

точек данной прямой, и записать уравнение полученной прямой».

Упражнение во второй редакции представляет большую познавательную и практическую ценность, т. к., во-первых, искомый график получается путем геометрического преобразования данного графика; во-вторых, устанавливается зависимость расположения графика от изменения ординат соответствующих точек преобразуемого графика; в-третьих, устанавливается структура формулы для преобразованного графика, и т. д.

В соответствии с дидактическими целями целесообразно использовать следующие виды задач:

1. Задачи, решение которых раскрывает содержание математических понятий, закономерностей и готовит учащихся к восприятию нового теоретического материала.

2. Задачи, в ходе работы над которыми ученики овладевают определенными методами и приемами решения, в частности, конструктивным.

3. Задачи, решение которых способствует закреплению, углублению и систематизации знаний учащихся.

Разумеется, такое деление условно, оно сделано в чисто методических целях.

Рассмотрим **задачи, в ходе решения которых учащиеся VI класса устанавливают геометрический смысл коэффициента *в* уравнения** $y = ax + в$.

Задача № 1. Возьмите график функции у = х и точки с координатами $(0; -1)$; $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; $(0; 2)$. Через каждую из этих точек проведите прямые, параллельные исходной, и сравните ординаты точек этих прямых с ординатами соответствующих точек исходного графика. Для каждой прямой напишите формулу зависимости у от х.

Задача № 2. Исходный график у = х преобразуйте в такой, чтобы ординаты их точек отличались на -2; -3; 1; 2; 5. Сделайте вывод о взаимном расположении графиков. Составьте по каждому из них формулу, устанавливающую соответствие между множествами X и У, и запишите общий вид этой формулы [$y = ax + в$]. Каков геометрический смысл коэффициента *в*?

Задача № 3. Постройте график функции $y=3x$ и перемещайте его параллельно самому себе

вдоль оси y. Напишите формулы для двух положений графика, когда $в>0$ и $в<0$.

Задача № 4. Повторите выделенную часть задачи № 3 для прямой, симметричной прямой $y=3x$ относительно оси абсцисс.

Задача № 5. Каков геометрический смысл коэффициентов a и $в$ в уравнении $y = ax + в$? Покажите схематически расположение прямых для различных значений a и $в$.

В процессе решения приведенных задач учащиеся убеждаются, что график функции $y = ax + в$ получается путем параллельного переноса прямой $y = ax$ на $в$ единиц в направлении оси y при $в>о$ и на $|в|$ единиц в противоположном направлении при $в<о$.

Задачи, в ходе работы над которыми ученики овладевают конструктивным (графическим) методом решения геометрических задач на вычисление. Этот метод состоит в том, что по известным элементам (в некотором масштабе) выполняется чертеж фигуры, а затем по получившемуся чертежу измерениями и вычислениями (с учетом масштаба) находят искомые величины. Измерения обычно производятся с точностью до 1 мм.

Конструктивное решение задач на вычисление в большинстве случаев проще аналитического и всегда приводит к правильному результату (с точностью, достаточной для школьной практики: 1%—2%), так как этот метод не связан с вычислениями и знанием метрических зависимостей между элементами фигур. Эта особенность графического метода позволяет пользоваться им для предварительной прикидки и проверки результата аналитического решения. Если же учащиеся не имеют необходимой теоретической подготовки для аналитического решения, то графические расчеты являются единственно возможным способом нахождения искомой величины.

Например, в IV классе только конструктивным методом может быть решена такая задача: «Постройте прямой угол; на его сторонах от вершины отложите отрезки в 32 мм и 57 мм; затем концы их соедините. Найдите длину стороны полученного треугольника, лежащую против прямого угла». О точности самостоятельного решения каждый ученик может судить по результату, предварительно вычисленному учителем.

Конструктивный метод решения задач на вычисление не применим при значительно отличающихся линейных размерах и слишком малой величине углов.

Сущность этого метода учащиеся усваивают, начиная с IV класса, на задачах примерно такого содержания:

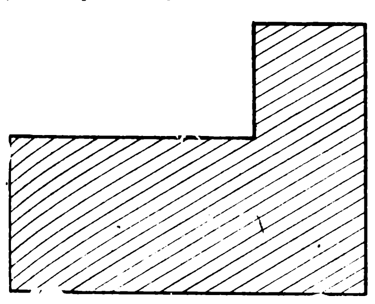
а) Какова величина углов треугольника, стороны которого соответственно равны 4,5 см; 5,2 см; и 3,4 см?

б) Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого соответственно равны 3,2 см и 5,7 см (с точностью до 0,1 см).

в) Начертить треугольник в масштабе 1 : 5, если даны основание (250 мм), боковая сторона (165 мм) и высота (125 мм).

г) В каком масштабе позволяют выполнить построение треугольника следующие размеры: основание — 500 мм, высота — 200 мм и боковая сторона — 230 мм?

Задачи, решение которых способствует закреплению, углублению и систематизации знаний учащихся по какому-либо разделу или по нескольким разделам. Например, знание формул площади геометрических фигур закрепляется в процессе решения расчетных задач, в частности, по готовому чертежу. При этом возможно варьирование чертежей как по сложности изображенной фигуры (рис. 6), так и по способу оформления чертежа; с нанесенными на нем размерами и без них («немой» чертёж или вместо размеров проставлены буквы).



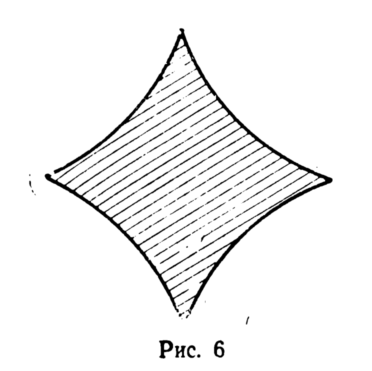


Рис. 6

Решение расчетных задач по «немым» чертежам требует бо́льшего умственного напряжения, чем по чертежам с нанесенными

размерами. Выполняя задачу по «немому» чертежу, ученик должен предварительно определить по нему все данные для качественной характеристики изображенной фигуры и только после этого приступить к количественному анализу ее, то есть установить, какие элементы нужно измерить, чтобы найти искомую величину, чем измерять, с какой точностью и, наконец, выполнить измерение и вычисление.

Благодаря решению расчетных задач закрепляются не только теоретические знания, но и вычислительные, измерительные навыки учащихся. Об этом можно судить по практической работе на определение площади треугольника в V классе.

Каждый ученик получает карточку, на которой треугольник задан тремя точками (тремя проколами иглы, чем обеспечивается быстрое приготовление дидактического материала и равенство треугольников на всех карточках).

Строя треугольник по трем заданным вершинам, ученики говорят об однозначности решения этой задачи (рис. 7).

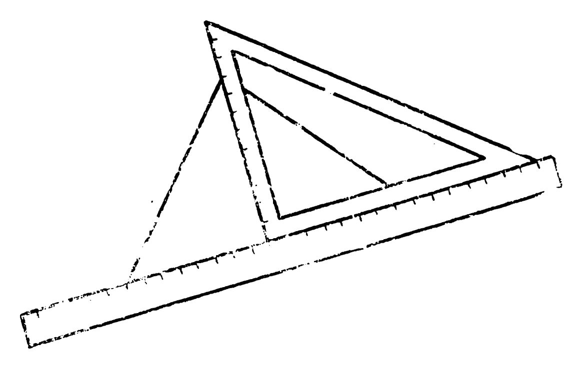


Рис. 7

Оформление записей при вычислении площади треугольника:

1. Единица измерения отрезков — см.
2. Точность измерения — 0,1 см.
3. Формула площади треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

4. Результаты измерений и вычислений.

№ измерения	размеры		величина площади S
	a	h	
1.	10,4	9,1	47
2.	11,6	8,2	48
3.	9,7	9,8	48

$$S_1 \approx \frac{1}{2} \cdot 10,4 \cdot 9,1 \approx 47,32 \approx 47,3 \quad (\text{см}^2);$$

$$S_2 \approx \frac{1}{2} \cdot 11,6 \cdot 8,2 \approx 47,56 \approx 47,6 \quad (\text{см}^2);$$

$$S_3 \approx \frac{1}{2} \cdot 9,7 \cdot 9,8 \approx 47,53 \approx 47,5 \quad (\text{см}^2);$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \approx 142,4 \text{ см}^2$$

Среднее значение $S \approx \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \approx 47,46 \approx 47.$

Ответ: площадь треугольника равна 47 см².

Дидактическая ценность рассмотренных в статье методов и приемов обучения состоит в том, что они выводят учащихся из пассивной роли слушателей, исполнителей и активно включают их в процесс обучения.

«Если ученик в школе не научится сам ничего творить, то и в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы научившись копировать, умели сделать самостоятельные приложения этих сведений». (Л. Н. Толстой).

С. Г. ПЕРВУХИНА

О МЕТОДИКЕ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ У УЧАЩИХСЯ IV—V КЛАССОВ

Модернизация содержания школьной программы по математике связана с пересмотром методов обучения в направлении повышения активизации познавательной деятельности учащихся, развития у них творческих способностей.

«Важное значение для успешного обучения матема-

тике имеет педагогически правильное сочетание индуктивных и дедуктивных методов» [5, 5]. В младших классах основную роль должны играть индуктивные, в частности опытные, методы установления фактов.

В IV и V классах при изучении геометрии значительное число выводов следует получать как обобщение результатов измерений и построений, выполняемых с помощью чертежных инструментов. Такие методы обеспечивают на раннем этапе обучения не только более глубокое и прочное усвоение изучаемого материала, но и формирование практических навыков, например: измерительных и конструктивных.

По новой программе значительное место в IV и V классах отведено геометрическим построениям. Тем самым создаются реальные возможности для активизации деятельности учащихся и обеспечивается подготовка к изучению систематических курсов геометрии и черчения.

Учащиеся IV и V классов должны овладеть навыками геометрических построений с помощью линейки, угольника, циркуля и транспортира. С конструктивными возможностями каждого из этих инструментов следует знакомить постепенно, по мере изучения соответствующего теоретического материала, и не в форме аксиом, а в виде основных задач на построение.

Линейка позволяет выполнить построение: а) отрезка, соединяющего две данные точки; б) прямой, проходящей через две данные точки; в) луча, исходящего из данной точки и проходящего через другую данную точку.

Циркуль служит для построения: а) окружности, если даны центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или концы радиуса); б) любой из двух дополнительных дуг окружности, если даны центр окружности и концы этих дуг.

Прямой угол (чертежный угольник) дает возможность провести через данную точку плоскости прямую, перпендикулярную данной прямой.

Транспортир позволяет построить точку, лежащую на луче, проходящем через данную на прямой точку и образующем заданный угол с этой прямой.

Точность графических операций во всех случаях повышается, если построения выполняются остро отточенным карандашом; точка отмечается уколом иглы или остро отточенного карандаша; заданный отрезок берется с масштабной линейки циркулем-измерителем, а не от-

кладывается по линейке, положенной непосредственно на бумагу.

Умение выполнять основные построения позволяет решать элементарные конструктивные задачи. К ним обычно относят те задачи, которые особенно часто входят в качестве составных частей в более сложные задачи. Например: деление данного отрезка пополам; деление данного угла пополам; построение на данной прямой отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой; построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; построение треугольника по трем данным сторонам; построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними и другие задачи.

Решить элементарную задачу на построение значит свести ее к конечному числу основных построений, т. е. для получения искомой фигуры необходимо выполнить в определенной последовательности основные конструктивные операции.

Например, построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

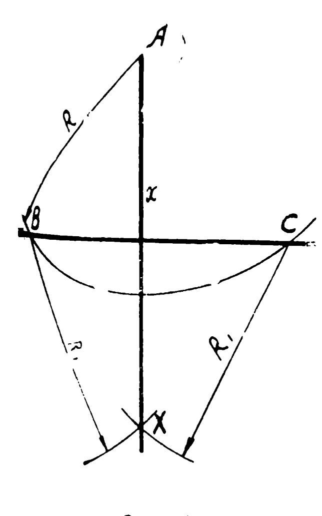


Рис. 1

1. **Прямым углом** (IV класс). Для прямого угла решение данной задачи является основным построением.

2. **Циркулем и линейкой** (V класс) строим последовательно:

1) окружность ω_1 (А, АБ);

2) окружность ω_2 (В, ВХ);

3) окружность ω_3 (С, СХ = ВХ);

(1—3 основные конструктивные операции);

4) $X = \omega_2 \cap \omega_3$;

5) $A \in X$ и $X \in x$ отсюда x или АХ — искомый перпендикуляр (рис. 1).

Рассмотренный пример геометрического построения показывает, что непосредственное расчленение решения на основные построения даже в элементарных задачах приводит к большому числу логических «шагов». В случае более сложных задач это может привести к тому, что трудно будет уследить за общей логической структурой решения. Поэтому целесообразно считать составными частями сложных конструктивных задач элементарные геометрические построения.

Однако на раннем этапе формирования навыков геометрических построений полезно с целью закрепления основных конструктивных операций указывать последовательность выполнения их в процессе решения более сложных задач.

По условию конструктивной задачи искомая фигура может строиться произвольных размеров, по размерам определяющих ее элементов и по конструктивным элементам в виде отрезков и углов, а также репродуцироваться с данной фигуры.

Примеры таких задач: 1) построить треугольник по трем сторонам; 2) построить треугольник, стороны которого соответственно равны: 4,5 см, 6,2 см и 3,4 см; 3) построить треугольник, если стороны соответственно равны данным отрезкам; 4) построить треугольник, равный данному. Каждый из указанных видов задач имеет определенное дидактическое назначение в курсе математики.

Умение строить геометрические фигуры произвольных размеров необходимо при доказательстве теорем и при решении задач на доказательство. Необходимость в построении фигур по размерам определяющих их элементов появляется при решении задач на вычисление и при доказательстве теорем, вернее, при подведении учащихся к формулировкам теорем, например: к признакам равенства треугольников и т. д.

Навыки построения фигур по размерам конструктивных элементов и «репродуцирования» изображений наибольший интерес представляют для трудового обучения и черчения, т. к. процесс решения таких задач аналогичен выполнению чертежей и разметки.

Построение фигур, заданных конструктивными элементами, в виде отрезков и углов, подготавливает учащихся к построению фигур, равных данным, а этот вид задач требует от ученика творческого применения зна-

ний. Прочитав чертеж, он должен назвать те конструктивные элементы, которые позволяют выбрать наиболее рациональный способ решения. «Репродуцирование» изображений является своеобразным синтезом знаний и навыков геометрических построений.

Различно назначение перечисленных видов конструктивных задач, но в целом они способствуют формированию навыков геометрических построений.

Исследование особенностей этого процесса показало, что практическая и образовательная ценность задач на построение значительно повышается, если, начиная с IV класса, учащиеся приучаются рассматривать фактическое построение как процесс решения некоторой совокупности конструктивных и теоретических задач, выполняемых в определенной последовательности, а именно:

устанавливается, построение какой фигуры следует выполнить;

указываются характеристические свойства искомой фигуры или составляющих ее основных фигур при «репродуцировании» изображений;

определяется возможность построения фигуры, заданной размерами или некоторыми геометрическими образами;

указывается масштаб выполнения чертежа, если фигура задана размерами конструктивных элементов;

выбираются конструктивные инструменты;

указываются основные построения и последовательность выполнения их для получения искомой фигуры;

выполняется построение;

проверяется правильность построения или путем измерения какого-либо элемента полученной фигуры (если она задана размерами), или на основе ее характерных признаков.

На первоначальном этапе образования конструктивных навыков такие рассуждения ведутся учеником по ходу построения вслух, а затем, в силу привычки — мысленно.

В качестве примера можно рассмотреть задачу для V класса: построить треугольник ABC, если AB = 5,0 см; BC = 3,5 см и AC = 4,3 см.

Примерное описание процесса построения по указанному плану. Требуется построить треугольник. Судя по условию, задача имеет необходимые данные для ее решения. Как и должно быть: сумма двух сторон треуголь-

ника больше третьей стороны. Размеры позволяют строить треугольник в масштабе 1 : 1. Для построения необходимы циркуль-измеритель, циркуль и масштабная линейка.

Последовательность решения:

1) строится одна из сторон, например: АВ = 5,0 см;

2) проводятся окружности ω_1 (А, АС) и ω_2 (В, ВС), где $C = \omega_1 \cap \omega_2$;

3) строятся отрезки (стороны треугольника) АС и ВС; △ АВС — искомый (рис. 2).

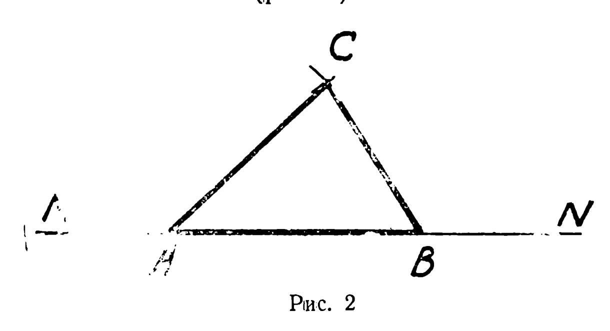


Рис. 2

В правильности построения в данном случае можно убедиться путем измерения одной из высот треугольника. Данные задачи показывают, что измерение при этом следует выполнять с точностью до 0,1 см. Например, у всех учащихся длина высоты СД ≈ 2,9 см.

При решении конструктивных задач очень важно сделать выразительным результат построения, что позволит легко отыскать на чертеже данную и искомую фигуру, вспомогательные построения и т. д.

«Учитель геометрии должен при оформлении чертежей придерживаться тех правил и указаний, которые были получены учащимися на уроках черчения» [4,112],— предлагает А. И. Фетисов. Но с геометрическими построениями учащиеся знакомятся в курсе математики до изучения черчения, поэтому необходимо на уроках математики рассматривать некоторые правила оформления чертежей.

Выразительность планиметрических чертежей достигается благодаря применению следующих правил:

контуры искомых фигур проводятся сплошными линиями основной толщины ($в \approx 1$ мм);

контуры данных фигур проводятся тонкими сплошными линиями ($1/2\, в \approx 1/2$ мм);

все линии вспомогательных построений делаются тонкими сплошными линиями ($1/4\ в \approx\ 1/4$ мм и менее);

для обводки контура искомых фигур можно использовать цветные карандаши;

равные отрезки для удобочитаемости изображения отмечаются перечеркиванием их одинаковым числом штрихов;

равенство углов отмечается или проставлением их размеров, или общепринятым способом (либо одинаковым числом концентрических дуг, либо одной дугой, перечеркнутой равным числом штрихов).

Благодаря применению указанных правил достигается только лишь удобочитаемость чертежа. Однако на этапе овладения навыками основных и элементарных построений важно показать не только результат решения, но и процесс выполнения его (этапы построения, используемые инструменты и приемы работы ими). Тем самым удается проверить, овладел ли ученик этими операциями.

Процесс построения может быть описан или отображен с помощью знаков. Словесное описание построений требует большой затраты времени и главную трудность в этом случае составляет изложение решения, иногда представляющее собой целое «сочинение». Из-за этого у учащихся снижается интерес к конструктивным задачам.

На уроках математики следует применять такие способы выражения мысли, которые позволили бы кратко отображать процесс построения. К таким средствам следует отнести: условные обозначения, математические знаки-символы.

Выбор средств отображения процесса построения зависит от используемых при этом конструктивных инструментов.

Последовательность построения циркулем и линейкой может быть отображена как при помощи условных обозначений, так и знаков. Если построения выполняются линейкой и угольником, то в этом случае математические символы являются самой удачной формой «стенографии» процесса решения (рис. 3). Однако знаковая «стенография» процесса построения свидетельствует только о знании основных и элементарных конструктивных операций, а умение применять их проверяется на решении более

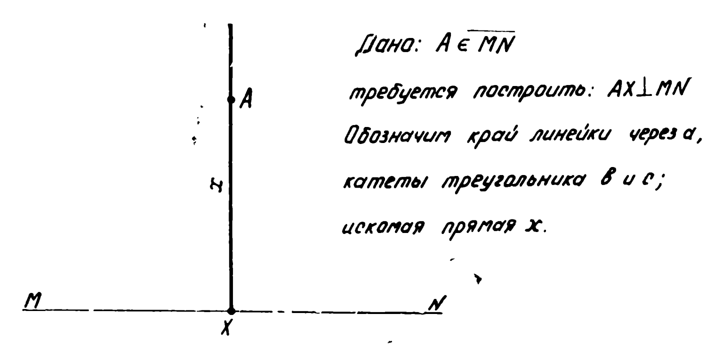


Рис. 3

сложных задач, например на вычисление, решаемых графическим методом, на вычерчивание разверток.

Формирование навыков геометрического построения может быть обеспечено только лишь целенаправленной системой задач. Для того, чтобы образовались прочные конструктивные навыки, необходимо строить системы задач по следующим принципам.

Непрерывности-систематичности. Принцип непрерывности выражается в равномерном распределении задач по всему курсу.

Вариативности. Целенаправленность задач, формирующих рассматриваемые навыки, достигается путем варьирования условий, т. е. изменения графического материала и словесной инструкции.

Например, исходная задача: построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Варьирование условия данной задачи достигается:

изменением положения данной прямой на плоскости и расположения данной точки относительно прямой;

изменением формулировки условия:

а) определить расстояние от точки до прямой;

б) построить прямой угол, одна из сторон которого

лежит на данной прямой, а другая проходит через данную точку;

в) построить прямой угол, одна из сторон которого лежит на данной прямой, а вершиной является данная точка на этой прямой;

г) определить высоту в треугольнике.

Изменение словесной инструкции исходной задачи не изменило математического содержания ее. Однако задача предстает перед учащимися в новом варианте, причем идентичность начального и нового вариантов скрыта. Чрезвычайно важно приучить школьников к разнообразию формулировок, выработать навыки разбираться в условии, каким бы необычным оно ни было. Тем самым учащиеся учатся отыскивать приемы решения задач не по внешним признакам условия, а по существу содержания задачи.

Перспективности. Система задач должна быть целенаправленной, т. е. готовить учащихся к определенным выводам и решению более сложных задач.

Например, решая задачи на построение геометрических фигур по заданным размерам конструктивных элементов, учащиеся готовятся к графическому методу решения геометрических задач на вычисление. Этот же навык (построение фигур заданных размеров) необходим при выполнении чертежей и наглядных изображений предметов на уроках черчения.

Упражнения на геометрические построения в новых учебниках математики для IV и V классов [1] в основном соответствуют перечисленным требованиям.

Основы рассматриваемых навыков закладываются в IV классе с помощью дидактических задач [7], но на этом виде упражнений не целесообразно задерживаться, т. к. только они не могут обеспечить развития навыков до уровня, который необходим для изучения систематических курсов геометрии и черчения.

Например, выполнению конструктивной операции — построению отрезка следует обучать учащихся путем решения дидактических упражнений на построение произвольного и заданного отрезка, при этом отрезок может быть задан размером, двумя точками (концами) и отрезком (построение отрезка, равного данному).

Во всех случаях необходимо приучать учащихся к определенной последовательности решения конструктивных

задач. Процесс построения отрезка произвольной длины рассмотрен в пособии для учителя [2, 26], а построение заданного отрезка следует выполнять примерно по такому плану: построение произвольной прямой или луча; фиксирование на прямой произвольной точки; снятие циркулем-измерителем размеров отрезка; построение заданного отрезка на произвольной прямой от фиксированной точки, а на луче — от его начала.

Благодаря варьированию условия этой задачи учащиеся подводятся к следующим выводам:

1) по заданному размеру можно построить сколько угодно отрезков, даже в том случае, если задан один конец (подготовка к определению окружности и круга);

2) двумя точками задается единственный отрезок.

Далее, умению строить перпендикуляр к прямой учащиеся могут быть обучены на ранее указанных дидактических задачах (стр. 40, 41). Их решение позволит сделать вывод о том, что через данную точку к данной прямой можно провести только один перпендикуляр.

При планировании процесса формирования навыков геометрических построений учителю необходимо подобрать упражнения, на которых учащиеся приобрели бы первые умения решать основные и элементарные конструктивные задачи с помощью различных конструктивных инструментов; определить возможности дальнейшего развития навыков. В этом учителю помогут учебники по математике и методические пособия к ним.

Однако полезно напомнить, что умение выполнять основные и некоторые элементарные операции (особенно построение заданного отрезка и угла) необходимо при построении треугольников. Варьирующими признаками в этом случае являются не только способы задания треугольника, но и виды его в зависимости от величины углов и сторон. Для формирования конструктивных навыков в IV и V классах следует использовать задачи на вычисление графическим методом и на построение разверток поверхностей куба и прямоугольного параллелепипеда.

Примеры задач, которые до изучения соответствующего теоретического материала могут быть решены графически в IV — V классах:

1. Каждые 100 м дорога поднимается на 5 м. Каков угол ее наклона к горизонту (М 1 см—10 м).

2. Пролет АС стропильной фермы равен 23,0 м, ноги ее АВ и СВ равны 12,0 м. Найти высоту фермы ВД. (Рис. 4).

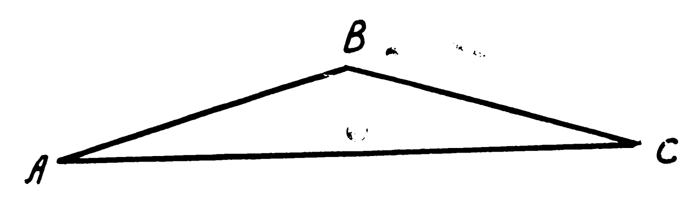


Рис. 4

3. Вычислить площадь треугольника со сторонами: 5,4 см, 6,3 см и 3,0 см.

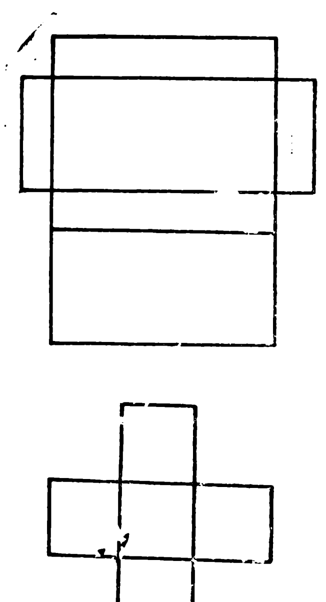


Рис. 5

4. Найти катет треугольника, противолежащий углу в 47°, если прилежащий к этому углу катет равен 6,5 см

Примеры задач на вычерчивание разверток для IV—V классов:

1. Изготовить модели геометрических тел по разверткам, изображенным на рисунке 5. Вычислить объемы этих тел и площади всех граней.

2. Изготовить из картона модель тела по рисунку 6. Вычислить площадь всех граней.

3. Сделать модель прямоугольного параллелепипеда с измерениями 12 см×6 см×9 см. Определить площадь всех граней.

4. Вырезать из бумаги квадрат со стороной 16 см и сделать из него коробку, высота которой равнялась бы 4 см. Вычислить емкость этой коробки.

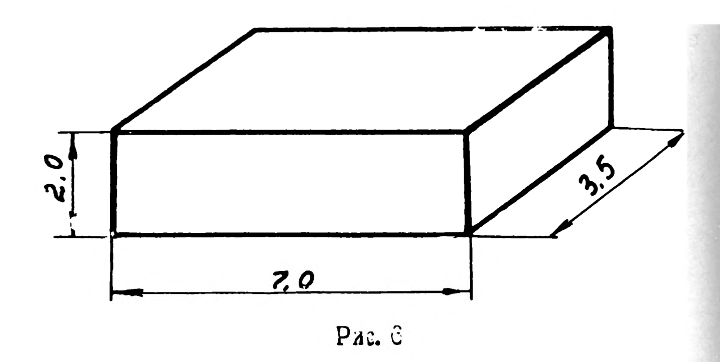


Рис. 8

5. Приготовить из бумаги прямоугольник размером 8,0 см × 14,5 см, вырезать у него по углам квадраты по 4,0 см и сделать коробку. Вычислить: а) площадь дна и боковых стенок этой коробки; б) объем ее.

Для того, чтобы сформировать устойчивые навыки основных и элементарных построений, необходимо приучать школьников IV—V классов пользоваться различными приемами выполнения этих операций при решении задач. Например, деление отрезка на две равные части может быть выполнено на глаз, путем нескольких проб («прикидок»), перегибанием листа бумаги, измерением отрезка и делением его длины пополам. Теоретически точное решение этой задачи получается путем построения серединного перпендикуляра к отрезку.

В конце пятого класса с целью проверки готовности учащихся к изучению курсов геометрии и черчения полезно привести в систему их знания и навыки по всем основным и элементарным построениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика. 4 класс (5 класс). Под ред. А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1970 (1971).

2. Математика в IV классе. Под ред. А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1970.

3. Моро М. И. и Бантова М. А. Математика. Учебник для второго (третьего) класса. М., «Просвещение», 1970 (1971).

4. Преподавание математики. Сб. статей. Под ред. А. И. Фетисова. М., Изд. Акад. пед. наук РСФСР, 1957.

5. Программы для средней школы по математике. — «Математика в школе», 1968, № 2.

6. Пышкало А. М. Геометрия в I—IV классах. М., «Просвещение», 1965.

7. Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении.— «Математика в школе», 1971, № 3.

А. А. ЮРЬЕВА

ИЗ ОПЫТА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ VI—VII КЛАССОВ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Большое значение в настоящее время в связи с переходом на новые программы придается обучению учащихся геометрии, в частности решению задач. Немаловажную роль в математическом развитии школьников имеют задачи таких направлений:

задачи логического характера (в широком смысле);

задачи практического характера;

задачи на экстремумы, решаемые элементарными средствами;

задачи (на доказательство или вычисление), решаемые методом геометрических преобразований.

Почему мы обращаем особенное внимание на задачи этих четырех направлений?

При анализе стабильного задачника по геометрии «Сборник задач по геометрии для 6—8 классов» Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой (изд. 10-е 1966 г.) было обнаружено, что задач такого характера явно недостаточно: в курсе геометрии VI класса задачи логического характера составляют 0,9% всех задач по этому классу; задачи практического характера — около 12%; задачи на экстремумы — около 0,1%; задачи, решаемые методом геометрических преобразований, — около 1,5%. Примерно аналогична картина и по курсу геометрии VII класса.

В 1966/67, 1967/68 учебных годах в VI—VII классах двух школ города Ульяновска (№№ 45, 29) и в VII классе ЮМШ при пединституте были проведены контрольные работы. Их тексты включали 4 задачи указанных направлений. Анализ контрольных работ показал, что зна-

ния учащихся VI—VII классов очень слабы; у них вызывали затруднения элементарные вопросы. Поэтому мы разработали систему упражнений по геометрии для учащихся VI—VII классов (по действующей программе) и для учащихся четвертых-шестых классов (по новой программе).

В статье описывается опыт работы по обучению учащихся VI—VII классов (действующая программа) решению указанных видов геометрических задач, но все выводы и рекомендации могут быть отнесены и к обучению учащихся IV—VI классов (новая программа).

Задачи логического характера

Каковы виды упражнений, предлагавшихся учащимся?

Какова методика работы над задачами логического характера?

Задачи-вопросы. На всех первых уроках геометрии в VI классе, когда изучалась тема «Основные понятия» (теперь почти вся тема в программе IV класса) учащимся предлагались устно задания, связанные с формированием геометрических понятий, выделением существенных признаков понятия, составлением определений понятий.

Установить, верны или неверны следующие утверждения (в смысле суждения, предложения):

а) в геометрии изучаются не только форма и размеры земельного участка, но и виды деревьев, растущих на нем;

б) геометрия изучает формы, размеры и взаимное расположение предметов;

в) пенал можно назвать геометрическим телом;

г) геометрическое тело имеет цвет;

д) если придавить снег ногой, в нем образуется углубление. Можно ли это углубление назвать геометрическим телом?

е) можно ли так сказать о прямой: «Прямая линия есть след точки, движущейся по одному направлению». «У прямой линии можно измерить длину»;

ж) начертите линию, все точки которой одинаково удалены от одной точки и которая не является окружностью.

Какие слова нужно поставить перед словом «линия» в предложении: «...линия плоскости, все точки которой одинаково удалены от одной точки, называемой центром, называется окружностью», чтобы это предложение служило определением окружности? и т. п.

Эти задания требовали устных ответов учащихся с обоснованием.

Составители новой программы по математике для средней школы предлагают обучать геометрии учащихся IV классов так, чтобы они могли понять, усвоить и пользоваться дедуктивными умозаключениями структуры силлогизма. Если построению таких умозаключений нужно пытаться обучать десятилетних учащихся, то тем более это можно осуществлять по отношению к двенадцатилетним детям, то есть учащимся VI классов. Думается, что обучать учащихся IV классов такой структуре умозаключений будет даже легче, чем шестиклассников: дело в том, что новая программа по математике выделяет 35 часов на весь геометрический материал в IV классе и объем материала меньше (не рассматриваются три действия над отрезками, три действия над углами, центральные углы и дуги), а по старой программе в VI классе в те же 35 часов входили и эти вопросы раздела «Начальные сведения из геометрии», да еще часть раздела «Треугольники» (6—8 теорем).

В IV классе будет время для обучения учащихся умению наблюдать, а в курсе геометрии VI класса такой возможности не было, хотя это и является необходимым условием для формирования основных геометрических понятий.

Приведем некоторые конкретные рекомендации по методике обучения учащихся доказательству теорем:

а) у учащихся необходимо формировать умение строить силлогизм на примерах математических и не математических. Этому в нашем опыте работы способствовало решение задач на равенство треугольников по готовому чертежу. Таких задач было решено в общей сложности около 16—20. Эти задачи способствовали выработке умения строить умозаключения и цепочки умозаключений, состоящие из 2, 3, 4 звеньев. Важным являлось обучение учащихся оформлению решения задачи.

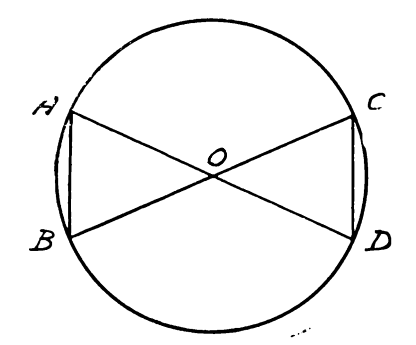


Рис. 1

Приведем образец записи решения задачи:

Дано:

Окружность с центром О, АД, ВС — диаметры.

Доказать: АВ = СД.

Доказательство:

АО = ОВ = ОС = ОД	как радиусы окружности О
∠АОВ = ∠СОД	как вертикальные
△АОВ = △СОД	по двум сторонам и углу между ними
АВ = СД,	так как ∠АОВ = ∠СОД;

б) осуществлялось введение терминов: дано, требуется доказать, доказательство;

в) проводилась краткая запись доказательства; она содержала общее высказывание и аргументацию его применения к частному, сама же запись могла выступать в различной форме. Каждое отдельное умозаключение предлагалось записывать отдельной строкой;

г) обеспечивалась наглядность в обучении доказательству первых теорем курса геометрии VI класса: свойства равнобедренного треугольника (см. серию чертежей рис. 2), признаки равенства треугольников, так как была неверной аргументация общих высказываний. Применение такой наглядности дало возможность повысить качество усвоения теорем.

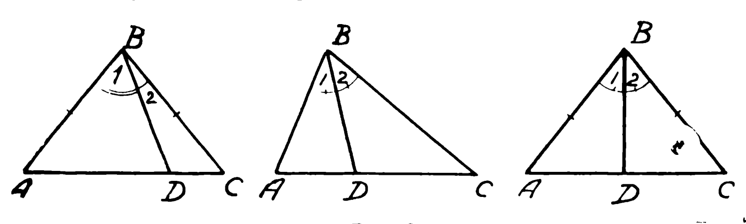


Рис. 2

д) осуществлялось введение знака $\Longrightarrow$;

е) не выделялся специальный урок на понятия: «теорема», «условие и заключение» теоремы, теоремы «прямая и обратная», так как всем предыдущим ходом обучения геометрии учащиеся были к этому подготовлены.

Приведем некоторые примеры умозаключений (рассуждений) из двух утверждений:

1. Все пионеры относятся к передовому отряду школьников. Коля Оленин — пионер $\Longrightarrow$
Коля Оленин относится к передовому отряду школьников.

2. Всякое понижение температуры обозначается отрицательным числом. Температура понизилась на 2 градуса $\Longrightarrow$
изменение температуры равно (—2) градусам.

3) Все точки окружности равноудалены от центра. Дуга — часть данной окружности $\Longrightarrow$
Все точки дуги равноудалены от центра.

4. Все прямоугольные треугольники — треугольники. Данная фигура — треугольник $\Longrightarrow$
Данная фигура — прямоугольный треугольник.

5. Если идет дождь, то на улице сыро.

К этим упражнениям были даны различные задания:

Сделать вывод их двух высказанных утверждений в упражнениях 1—4.

В таких предложениях, как 4-е, определить верно ли сделали вывод.

В 5-м упражнении составить обратное утверждение (приводилась аналогия со взаимно обратными задачами из арифметики); выяснить, верно ли обратное утверждение.

Придумать примеры верных, неверных утверждений.

Задачи практического характера

К задачам практического характера отнесены упражнения на овладение приемами работы чертежными инструментами: линейкой, циркулем, угольником и задачи на формирование чертежно-графических, функционально-графических навыков.

В VI классе мы постепенно приступали к решению задач, формирующих чертежно-графические и функционально-графические навыки.

Оформлению решений особенно первых задач уделялось достаточное внимание. У каждого ученика класса был альбом с нелинованной бумагой, который специально служил для индивидуальных домашних заданий по геометрическим построениям. В альбомах выполнялись работы:

а) действия над отрезками;

б) действия над углами;

в) построение линий в треугольнике;

г) построение линий в многоугольнике и т. п.

С целью выявления степени развития наблюдательности у учащихся им предлагалось написать домашнее сочинение на тему: «Что я знаю о треугольнике». Ко времени объявления темы и плана сочинения (перед зимними каникулами) учащиеся имели небольшой запас знаний о треугольниках: виды треугольников, медианы, биссектрисы углов треугольника, свойства равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников, свойство жесткости треугольника. Поэтому основной целью домашнего сочинения служила проверка наблюдательности учащихся в применении такого свойства треугольников, как жесткость, практического использования этого свойства в жизни; в отыскании треугольников, обладающих свойствами осевой симметрии.

План сочинения:

1. Где в жизни встречаются треугольники?
2. Какие бывают треугольники?
3. Что означает понятие: треугольник — фигура жесткая?
4. Где и как используется жесткость треугольника?
5. Какие геометрические фигуры и почему можно считать нежесткими?
6. Приведите примеры использования на практике свойства нежесткости фигур.
7. В каких треугольниках можно найти оси симметрии? Выполнить построения осей симметрии треугольника.
8. Как и где используется осевая симметрия фигур?

Лишь несколько человек сумели правильно написать о четырехугольниках, как о нежесткой фигуре. В качестве примеров нежестких фигур учащиеся приводили кронштейны подвесных к стене ламп, рессор (гармошек). Некоторые же не поняли существа свойства нежесткости:

отнесли циркуль, ножницы к нежестким фигурам; жесткость треугольника объясняли тем, что треугольник сломать нельзя, а нежесткую фигуру сломать можно и т. д.

Это говорит о том, что мы не учим школьников целенаправленно наблюдать окружающую жизнь, делать правильные выводы, не всегда ищем в природе прообразы геометрических образов, недостаточно осуществляем связь теории и практики в школьном обучении.

Задачи на экстремумы

Общеизвестно значение задач на максимумы, минимумы, оптимумы для практики, роль их трудно переоценить.

В курсе VI класса решению этих задач также уделялось внимание, но они имели пропедевтический характер: трудно говорить о системе в решении таких задач в указанном классе. Тем не менее внимание учащихся заострялось на таких **существенных** для дальнейшего изучения материала задачах:

Построение единственной прямой через две данные точки плоскости (противопоставление этого построению других линий, проходящих через те же данные точки).

Аналогичная задача относительно построения отрезка с выяснением сравнительной длины этого отрезка.

Наименьшее возможное число прямых, проходящих через 3 данные точки плоскости (рассмотрение различного положения точек).

Решение задач вида:

а) Даны прямая MN, точки A и B, лежащие по разные стороны этой прямой. На прямой MN найти такую точку C, чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей;

б) даны прямая MN и точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой MN найти такую точку C, чтобы разность расстояний от данных точек до C была наибольшей.

Наименьшая величина расстояний от точки, не лежащей на прямой, до этой прямой.

Наименьшее и наибольшее возможное число прямых, проходящих через 4 данные точки плоскости (рассмотрение различного положения точек).

Построение замкнутой ломаной линии, состоящей из наименьшего числа звеньев.

Нахождение величины наименьшего и наибольшего углов (не превосходящих 180°) между стрелками часов, когда они показывают 3 часа, 11 часов, 2 часа.

На окружности даны две точки А, В. Назвать наибольшую и наименьшую из двух дуг, определяемых этими точками.

Построить проекции равных отрезков, расположив их как угодно по отношению к данной прямой. В каком случае проекция отрезка будет наименьшей? В каком случае проекция отрезка будет наибольшей?

Требовалось ответить на вопросы, не проводя доказательства. Эти и другие задачи составляли пропедевтику в переходе к задачам на экстремумы, решение которых осуществлялось в определенной последовательности на факультативных занятиях в курсе VII класса в теме «Геометрические преобразования».

Задачи, решаемые методом геометрических преобразований

Им уделялось значительное внимание, так как к этому времени учащиеся имели уже представление и об осевой и о центральной симметриях.

В VII классе навыки учащихся в решении задач логического и практического характера, на экстремумы и особенно задач, решаемых методом геометрических преобразований, закреплялись и совершенствовались на базе уже другого теоретического материала — программного материала VII класса. Рассмотрим на примере двух тем VII класса методику обучения учащихся задачам указанных ранее направлений.

В VII классе в теме «Окружность и круг. Цилиндр» очень важным моментом является взаимодействие задач указанных четырех направлений в системе упражнений.

К задачам практического характера следует прежде всего отнести упражнения по использованию чертежных инструментов: (циркуль, линейка, угольник, транспортир) для выполнения геометрических построений: касательных к окружности и окружностям; дуги, содержащей заданное число градусов, хорд заданной величины в заданной окружности; окружности, описанной около данного треугольника; окружности, вписанной в данный треугольник и др.

Последовательность выполнения этих построений была такова:

а) на уроке, посвященном рассмотрению диаметра, перпендикулярного к хорде, строились дуги окружности в 90°, 45°, в 22°30′ с помощью угольника и линейки;

б) на уроке, посвященном рассмотрению зависимости между хордами и дугами, строились дуги окружности в 60°, 120° (циркулем и линейкой), в 30° с помощью угольника и линейки. Причем обязательно рассматривалось теоретическое обоснование этих построений;

в) на третьем уроке рассматривался вопрос о расстоянии хорд определенной длины (стягивающих дуги в 30°, 60°, 45°, 90°, 120° и т. п.) до центра.

Учащимся предлагались как серия готовых чертежей, так и самостоятельное выполнение чертежей не только угольником и линейкой, но циркулем и линейкой с целью вспомнить уже известные им построения. На этом же уроке доказывались теоремы: равные хорды одинаково удалены от центра; из двух хорд разной длины большая хорда расположена ближе к центру;

г) на уроке, посвященном свойству дуг, заключенных между параллельными хордами, прежде чем приступить к изучению нового материала, рассматривались различные взаимные положения двух хорд в окружности (хорды пересекаются под углом, не равным 90°; хорды взаимно перпендикулярны; хорды параллельны).

В связи с этой темой рассматривался вопрос о четырехугольниках, вписанных в окружность (прямоугольник, равнобедренная трапеция).

Этот урок, в основном, посвящался решению задач логического характера.

В темах «Взаимное положение прямой и окружности» и «Вписанный угол и его измерение. Угол, образованный касательной и хордой» главное внимание уделялось выполнению чертежей к задачам.

Особенно важным моментом является вопрос о построении дуг окружности заданной величины (чаще всего это можно сделать через построение с помощью транспортира соответствующих заданной дуге или центральных углов, или вписанных углов, или углов, образованных касательной и хордой, согласно условию задачи). Но целый ряд задач требует иной методики в выполнении чертежа, соответствующего условию задачи. В таких

случаях обязательна разъяснительная работа учителя по выполнению чертежа к задаче.

Точный чертеж выполняется или после решения задачи или до решения, но с целью правильного построения величины дуг, заданных в градусной мере, окружность строится с помощью полуокружности транспортира.

Так, например, для учащихся должна быть ясной методика выполнения чертежей к задачам такого содержания:

а) через концы двух равных хорд АВ и АС, образующих между собой угол в 130°, проведены касательные ВД и СД. Найти углы АВД и ВДС;

б) вершины А, В, С треугольника, лежащие на окружности радиуса 7 дм., делят ее в отношении 10 : 23 : 27. Найти углы треугольника и меньшую сторону.

К задачам на экстремумы, известным учащимся уже в VI классе и сформулированным выше, добавлялся еще ряд задач. Это, например, следующие задачи:

Радиус окружности равен R. Точка М находится на расстоянии a от центра окружности. Вычислить наибольшее и наименьшее расстояния точки М от окружности.

Доказать, что из всех хорд, проведенных через точку внутри окружности, наименьшая та, которая делится этой точкой пополам; в другой формулировке эта задача такова: доказать, что из всех хорд, проходящих через точку, взятую внутри окружности, наименьшей будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через данную точку.

В окружности проведены две хорды разной длины. Доказать, что большая хорда расположена ближе к центру.

Где находятся центры окружностей, проходящих через две данные точки? Чему равен радиус наименьшей окружности, проходящей через две эти точки?

Таким образом, у учащихся создавался запас геометрических задач на экстремумы.

Задачам, решаемым методом геометрических преобразований, уделялось значительное место на факультативе в VII классе.

В первую очередь, используя свойства осевой и центральной симметрий решались задачи на экстремумы. Это — задачи №№ 38, 139 из сборника задач по геометрии

для VI—VIII классов Н. Н. Никитина и Г. Г. Масловой (изд 10-е. 1966 г.).

Приведем еще примеры задач на экстремумы, решаемых с помощью свойств симметрий:

а) на биссектрисе внешнего угла B треугольника ABC взята точка M. Доказать, что периметр треугольника ABC меньше периметра треугольника AMC;

б) даны прямая MN и точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой MN найти такую точку C, чтобы разность расстояний от данных точек до точки C была наибольшей.

Кроме этого, решались задачи и на вычисление с помощью свойств симметрий.

Такая постановка обучения учащихся решению задач четырех рассмотренных направлений дала возможность улучшить успеваемость класса по геометрии.

Считаем, что, если учитель IV—VI классов (новая программа) будет уделять достаточное внимание обучению учащихся решению задач указанных четырех направлений, то сможет не только улучшить успеваемость класса, но и значительно обогатить логическое мышление учащихся.

Г. В. ШИЧАЛИН

К ВОПРОСУ О РАССТОЯНИИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ

В геометрии часто встречаются задачи, приводящие к определению расстояния между геометрическими фигурами. Однако понятие «Расстояние между геометрическими фигурами» в курсе геометрии средней школы не уточнено. Вполне определенно решен вопрос только для расстояния от точки до прямой и до плоскости. Отсутствие определения расстояния между геометрическими фигурами исключает из курса школьной геометрии ряд содержательных задач, имеющих практическое значение, и не позволяет четко определить некоторые геометрические места.

Попытка расширить понятие о расстоянии между геометрическими фигурами встречается в [3], но и там автор не идет дальше определения расстояния между окружностью и прямой линией. Отрадно отметить появление в [4] и [5] упражнений на определение расстояния

между геометрическими фигурами, хотя дано это определение в сноске в [5] на стр. 98.

Ознакомление учителей математики с понятием расстояния между геометрическими фигурами и применение этого материала на уроках геометрии, а также на факультативных занятиях будет полезным.

В статье использованы определения расстояния между множествами, данные в работах [1], [2], [6]. Правомерность такого использования естественна, ибо все геометрические фигуры являются множествами точек, удовлетворяющих некоторым условиям и расположенных в пространстве с определенной метрикой.

В ходе дальнейшего изложения предполагается известным определение расстояния между двумя точками, т. е. метрика пространства точек.

Определение 1 расстояния между двумя точками.

Расстоянием между двумя точками А и В пространства называется неотрицательное действительное число $|AB|$ («расстояние от А до В»), которое удовлетворяет следующим требованиям:

1°. $|AB| > 0$, если $A \neq B$;
$|AA| = 0$, для любой точки пространства;
2°. $|AB| = |BA|$ для любых А и В;
3°. $|AB| \leqslant |AC| + |BC|$ для любых А, В, С.

Пространство точек, в котором установлено высказанное определение, называется **метрическим пространством.**

Также полагается известным и способ нахождения числа $|AB|$ для данных точек А, В, если единица измерения выбрана.

Дадим общее определение расстояния между двумя геометрическими фигурами.

Пусть даны в пространстве две фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Возьмем произвольные точки X_1 и X_2, соответственно принадлежащие этим двум фигурам (рисунок 1).

Числа, являющиеся длинами отрезков $[X_1\ X_2]$, образуют бесконечное множество М неотрицательных действительных чисел. Очевидно, что для этого множества М существует точная нижняя граница.

В случае, когда фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$ замкнуты, то эта точная нижняя граница является наименьшим числом в этом множестве неотрицательных чисел. Вот эту точную

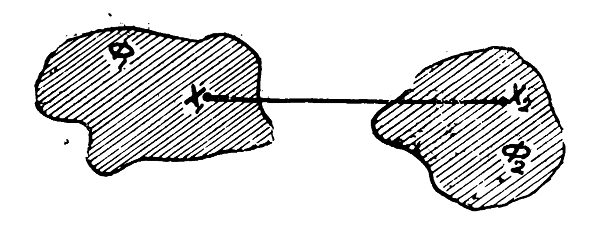


Рис. 1

нижнюю границу будем называть расстоянием между фигурами Φ_1 и Φ_2. Таким образом приходим к определению.

Определение 2. Расстоянием между двумя геометрическими фигурами Φ_1 и Φ_2 называется неотрицательное действительное число, наименьшее из всех чисел, являющихся длинами отрезков, соединяющих произвольную точку X_1 фигуры Φ_1 с произвольной точкой X_2 фигуры Φ_2. Будем обозначать это расстояние так:

$$d\ (\Phi_1, \Phi_2).$$

Если одна или обе данные фигуры Φ_1 и Φ_2 открытые, то тогда в множестве M неотрицательных действительных чисел, являющихся длинами отрезков $[X_1 X_2]$, где $X_1 \in \Phi_1$ и $X_2 \in \Phi_2$, не будет существовать наименьшего числа. Тогда за расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 мы будем принимать точную нижнюю границу множества M, т. е. наибольшее из всех действительных чисел, меньших любого из чисел множества M, т. е.

$$d\ (\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{\, |X_1 X_2|;\ X_1 \in \Phi_1,\ X_2 \in \Phi_2 \,\}.^*$$

Если фигуры Φ_1 и Φ_2 пересекаются, то $d(\Phi_1, \Phi_2) = O$. Обратное же утверждение (если $d(\Phi_1\ \Phi_2) = O$, то фигуры Φ_1 и Φ_2 пересекаются) верно только для замкнутых фигур Φ_1 и Φ_2. В противном случае при $d(\Phi_1, \Phi_2) = O$ фигуры Φ_1 и Φ_2 не имеют общих точек, т. е. не пересекаются.

Рассмотрим частные случаи, когда в качестве фигур Φ_1 и Φ_2 будут взяты различные геометрические образы.

---

* Это остается в силе и в случае замкнутых фигур.

1. $Ф_1$ и $Ф_2$ — две точки А и В. Тогда мы будем иметь расстояние между двумя точками, определенное выше.

2. $Ф_1$ — точка А, $Ф_2$ — прямая линия a.

Фигура $Ф_1$ содержит одну точку А, совпадающую с точкой X_1 по условию. Точки $X_2 \in Ф_2$ расположены на прямой a (рисунок 2).

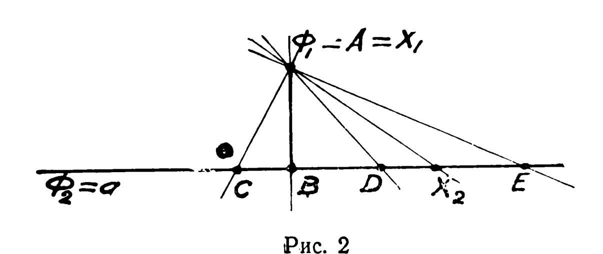


Рис. 2

Опустив из точки А перпендикуляр на прямую a и проведя наклонные (AC), (AD), (AE), мы, опираясь на известную теорему из планиметрии, получим, что

$$d\ (Ф_1, Ф_2) = d\ (A, a) = d\ (AB),$$

так как длина отрезка перпендикуляра [AB] будет меньше длины отрезка любой наклонной, проведенной к прямой a из одной точки А с перпендикуляром (AB). Следовательно,

$$d\ (A, a) = |AB|,$$

т. е. расстояние от точки А до прямой a равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из точки А на эту прямую.

3. $Ф_1$ — точка А; $Ф_2$ — луч [OM).

Здесь следует рассмотреть два случая. Проведем через начало луча О прямую линию l, перпендикулярную лучу [OM). Эта прямая разделит всю плоскость на две полуплоскости, в одной из которых расположен наш луч.

Условимся полуплоскости обозначать так $[l, M)$, где l — прямая линия, являющаяся краем полуплоскости, а М — любая точка этой полуплоскости.

Полосу с краями l_1 и l_2 будем обозначать так $[l_1, l_2]$.

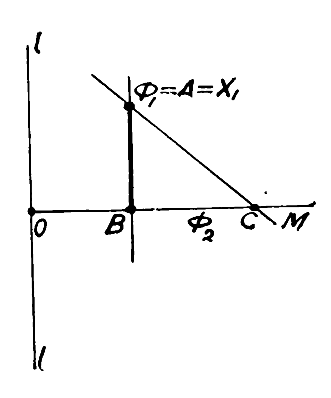


Рис. 3

а) Точка A принадлежит той полуплоскости [l ,M], в которой расположен луч [OM) (рисунок 3).

Здесь очевидно за расстояние точки A до луча [OM) следует взять длину отрезка [AB], т. е.:

$$d (A,[OM)) = |AB|.$$

б) Точка A принадлежит той полуплоскости [l ,B), которой не принадлежит луч [OM) (рисунок 4).

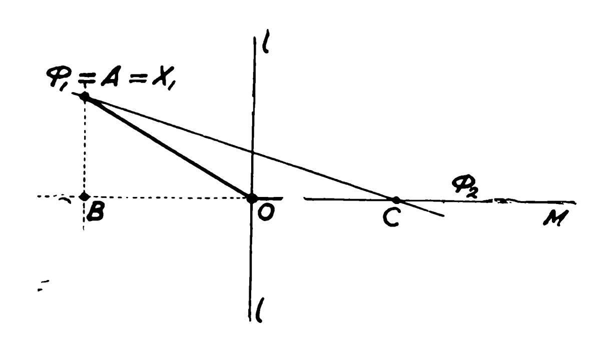


Рис. 4

В этом случае перпендикуляр, проведенный из точки A на прямую луча, не пересекается с лучом [OM).

В соответствии с определением 2 нас будут интересовать расстояния точки A (это $X_1 \in Ф_1$) до точек луча [OM) ($X_2 \in Ф_2$).

Из этих расстояний, очевидно, наименьшим будет |AO|, т. к. $|AO| < |AC|$. Отрезок же [AB] и его длина нас в данной постановке вопроса интересовать не могут, так как точка B не принадлежит данной фигуре $Ф_2$, т. е. лучу [OM). Таким образом имеем:

$$d (A,[OM)) = |AO|.$$

Итак, при определении расстояния от точки А до луча [OM) следует поступать так:

Прямая l, перпендикулярная лучу [OM) и проходящая через его начало, разделяет плоскость на две полуплоскости $[l, M)$ и $[l\ M')$, в одной из которых целиком располагается луч [OM) (рисунок 5).

Если точка A_1 расположена в той же плоскости, что и данный луч [OM), то расстояние d(A,[OM)) находится так же, как и расстояние от точки до прямой.

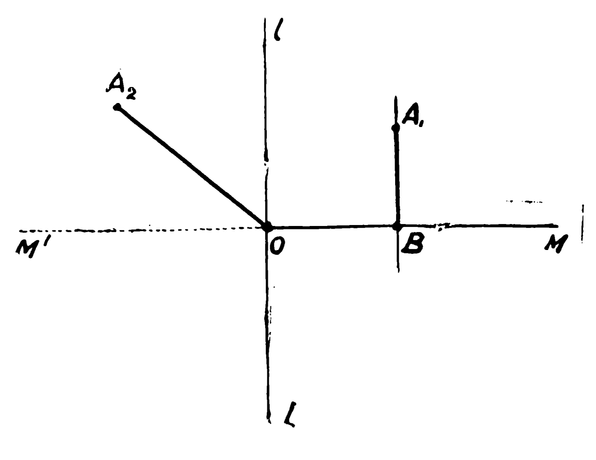


Рис. 5

Если же точка A_2 расположена во второй полуплоскости $[l,M')$, то расстояние ее до луча [OM) будет всегда равно расстоянию точки A_2 до начала O луча [OM).

Если точка $A \in l$, то можно взять любой из этих случаев. Таким образом,

а) $A_1 \in [l, M) \Rightarrow d\ (A_1, [OM)) = |A_1 B|$;

б) $A_2 \in [l, M') \Rightarrow d\ (A_2, [OM)) = |A_2 O|$.

Можно сказать, что полуплоскость $[l, M')$ является геометрическим местом точек, расстояния которых до луча [OM) определяются соответственно длинами отрезков, соединяющих эти точки с началом луча O (рисунок 6). Полуплоскость есть замкнутая фигура.

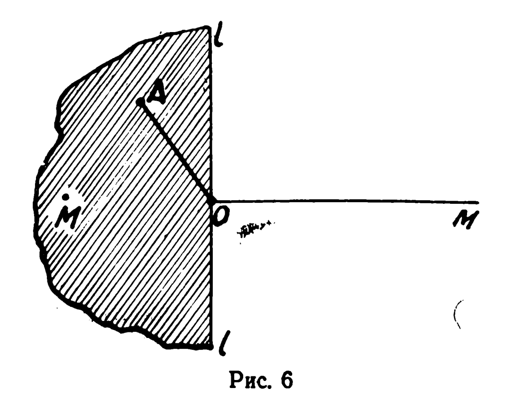


Рис. 6

4. Φ_1 — точка A; Φ_2 — отрезок [MN].

Этот случай не может вызвать затруднений после рассмотрения предыдущего.

Прямые l_1 и l_2, проходящие через концы отрезка и перпендикулярные к нему, делят плоскость, в которой лежит отрезок, на три области (рисунок 7):

$[l_{1,2}]$ — полоса, ограниченнная параллельными прямыми l_1 и l_2 содержащая данный отрезок [MN];

$[l_1, B_2)$ и $[l_2, B_3)$ — полуплоскости.

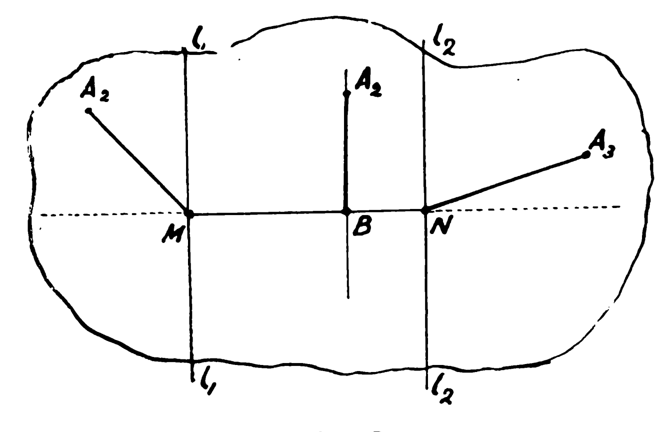


Рис. 7

Тогда легко сделать следующие заключения:

1. Если $A_1 \in [l_1, l_2]$ и $(A_1 B_1) \perp (MN)$, то $d(A_1, [MN]) = |A_1 B|$;
2. Если $A_2 \in [l_1, B_2)$, то $d(A_2, [MN]) = |A_2 M|$;
3. Если $A_3 \in [l_2, B_3)$, то $d(A_3, [MN]) = |A_3 N|$.

Таким образом, если перпендикуляр (AB), опущенный из данной точки A на прямую отрезка, пересекает отрезок [MN], то расстояние d (A, [MN]) равно расстоянию от данной точки A до основания перпендикуляра B; если же этот перпендикуляр (AB) не пересекает отрезок [MN], то расстояние d (A, [MN]) равно расстоянию точки A до ближайшего конца отрезка, т. е.

$$d(A, [MN]) = |AM| \text{ или } d(A, [MN]) = |AN|.$$

5. Φ_1 — точка A; Φ_2 — окружность с центром O.

Одновременно рассмотрим случаи, когда точка A расположена вне и внутри данной окружности (рисунок 8).

Проведем прямую (AO) и обозначим диаметр окружности через [BC]. Соединим точку A с любой точкой $X_2 \in \Phi_2$, т. е. окружности. Из рассмотрения $\triangle AOX_2$ имеем (рисунок 8а):

$$|AO| < |OX_2| + |AX_2|;$$

$$|AB| + |BO| < |OX_2| + |AX_2|;$$

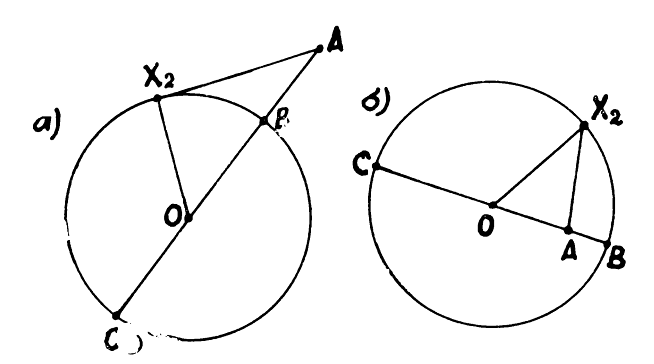


Рис. 8

Так как $|OX_2| = |OB|$, то

$$|AB| < |AX_2|.$$

(для случая, изображенного на рисунке 8б, имеем аналогично:

$$|AO| > |OX_2| - |AX_2|;$$
$$|OB| - |AB| > |OX_2| - |AX_2|;$$

так как $|OX_2| = |OB|$, то

$$-|AB| > -|AX_2|, \text{ или}$$
$$|AB| < |AX_2|).$$

Получили, что отрезок $[AB]$ меньше отрезка $[AX_2]$, следовательно:

$$d(A,\Phi_2) = |AB|.$$

Расстояние $d(A,\Phi_2)$ точки A до окружности Φ_2 равно:

а) Если точка A расположена вне окружности — длине отрезка прямой (AO) с началом в точке A и концом в ближайшей точке пересечения прямой (AO) с окружностью, т. е. $|AB|$.

б) Если точка A расположена внутри окружности — длине отрезка радиуса, проведенного через точку A с началом отрезка в точке A и с концом на окружности, т. е. $|AB|$.

6. Φ_1 — окружность с центром O;

Φ_2 — прямая a.

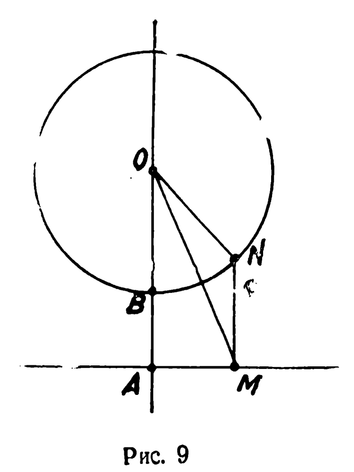


Рис. 9

Из центра O опустим перпендикуляр (OA) на прямую a и оценим отрезок $[AO]$ (рисунок 9).

Возьмем на окружности точку N и сравним отрезок $[AB]$ с отрезком $[MN]$. Построим $\triangle OMN$. Для сторон этого треугольника имеем:

$$|MN| > |OM| - |ON|. \quad (1)$$

Очевидно, что $|OM| > |OA|$.

Так как $|ON| = |OB|$, то будем иметь:

$$|OM| - |ON| > |OA| - |OB| \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$|MN| > |OA| - |OB|$, или

$|MN| > |AB|$.

Следовательно, $[AB]$ есть наименьший из всех отрезков, соединяющих точки окружности с точками прямой, и искомое расстояние

$$d\ (\Phi_1, \Phi_2) = |AB|.$$

Расстояние между данной окружностью и данной прямой равно длине отрезка $[AB]$ перпендикуляра, опущенного из центра O окружности на данную прямую a, причем A есть основание перпендикуляра, а точка B — точка его пересечения с окружностью, расположенная между центром O и прямой a.

7. Φ_1 — окружность с центром O_1;

Φ_2 — окружность с центром O_2.

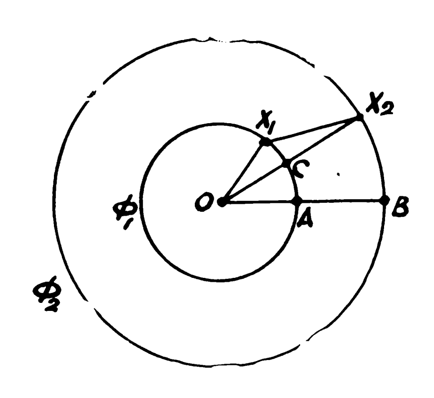


Рис. 10

а) Φ_1 и Φ_2 — две концентрические окружности (рисунок 10). Проведем любой радиус большей окружности $[OB]$ и оценим отрезок $[AB]$, сравнив его с любым отрезком $[X_1X_2]$, где $X_1 \in \Phi_1$, $X_2 \in \Phi_2$. Отрезок $[X_1X_2]$ не лежит, вообще говоря, ни на одной из радиальных прямых (если да, то $[X_1X_2] = [AB]$). Соединим концы отрезка $[X_1X_2]$ с центром O. Из треугольника OX_1X_2 имеем:

$$|OX_2| < |OX_1| + |X_1X_2|, \qquad \text{или}$$

$$|OC| + |CX_2| < |OX_1| + |X_1X_2|, \qquad \text{или}$$

$$|CX_2| < |X_1X_2|; \text{ но так как } |CX_2| = |AB|, \text{ то}$$

$$|AB| < |X_1X_2|, \text{ т. е.}$$

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = |AB|.$$

Если радиусы окружностей Φ_1 и Φ_2 равны соответственно r и R то,

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = R - r.$$

б) Φ_1 и Φ_2 — две эксцентрические окружности, лежащие одна внутри другой.

Проведем линию центров и сравним отрезок $[AB]$ по длине с произвольным отрезком $[X_1X_2]$, где $X_1 \in \Phi_1$, $X_2 \in \Phi_2$.

Рассмотрим рисунок 11. Из $\Delta O_2X_1X_2$ имеем:

$$|O_2X_2| + |X_1X_2| > |O_2X_1| \quad \text{или}$$

$$|O_2X_2| + |X_1X_2| > |O_2K| + |KX_1|,$$

так как $|O_2X_2| = |O_2K|$, то

$$|X_1X_2| > |KX_1| \qquad (1)$$

Докажем, что $|KX_1| > |AB|$. Для этого рассмотрим ΔO_2AX_1.

В этом треугольнике

$$\angle O_2AX_1 > \angle O_2X_1A$$

(O_1AX_1 — равнобедренный и $\angle O_1AX_1 = \angle O_1X_1A$, а $\angle O_2X_1A$, очевидно, меньше $\angle O_1X_1A$), следовательно, имеем:

$$|O_2X_1| > |O_2A| \quad \text{или}$$

$$|O_2X_1| + |KX_1| > |O_2B| + |AB|,$$

так как $|O_2K| = |O_2B|$, то

$$|KX_1| > |AB| \qquad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2) неравенства, получим

$$|X_1X_2| > |AB|.$$

Следовательно, $d(\Phi_1, \Phi_2) = |AB|$.

а) В случае, когда Φ_1 и Φ_2 — окружности с внутренним или внешним касанием, или пересекаются, имеем:

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

г) Φ_1 и Φ_2 — две окружности, расположенные одна вне другой.

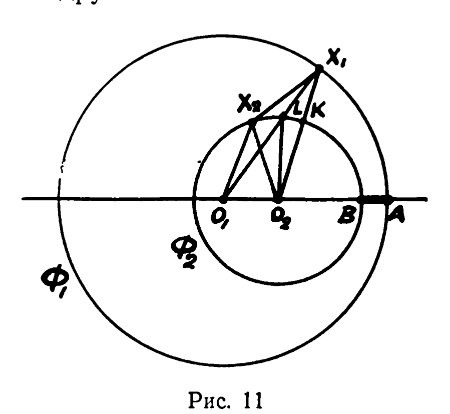


Рис. 11

Из рисунка 11 усматриваем, что

$$|X_1X_2| > |AB|,$$

Следовательно,

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = |AB|.$$

Из рассмотрения случаев а, б, в, г следует, что за расстояние между двумя окружностями Φ_1 и Φ_2 принимается длина отрезка, расположенного на линии центров и с концами на данных окружностях.

В случаях б) и г) легко можно было бы доказать, что длины отрезков [BC] и [CD] выражают наибольшие расстояния между точками двух окружностей.

8. Φ_1 — точка A; Φ_2 — плоскость α.

Опустим из точки A перпендикуляр (AA_1) и проведем отрезок, соединяющий эту точку с произвольной, отличной от A_1 точкой $X_2 \in \Phi_2$ (рисунок 12). Так как $|AA_1| < |AX_2|$, то $d(A, \alpha) = |AA_1|$, что соответствует общепринятому понятию расстояния между точкой и плоскостью.

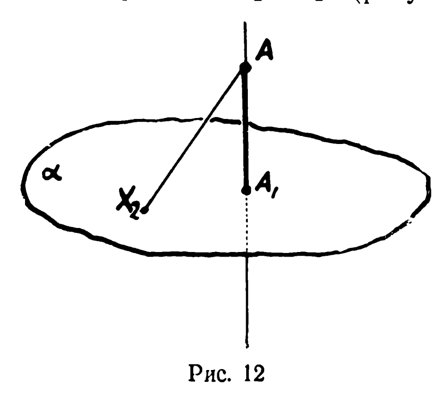


Рис. 12

9. Φ_1 — точка A; Φ_2 — полуплоскость $[a, M)$. Этот случай аналогичен случаю, рассмотренному в пункте 3. Рассмотрим следующие случаи:

а) Если перпендикуляр, опущенный на плоскость, частью которой является полуплоскость [a, М), пересекает эту полуплоскость, то за расстояние между точкой А и полуплоскостью [a, М), как правило, принимается длина отрезка этого перпендикуляра |AB|.

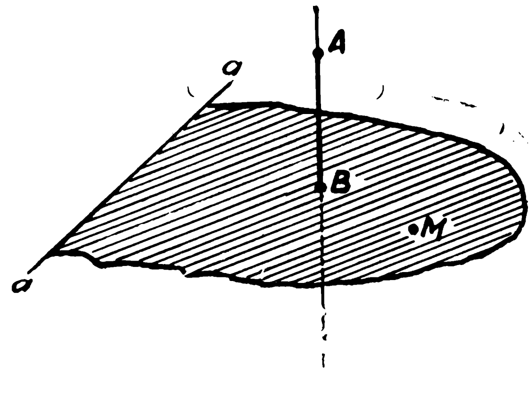


Рис. 13

б) Если перпендикуляр (AA_1) не пересекает полуплоскость [a, М), а пересекает вторую полуплоскость [a, М′), то, как и в пункте 3, найдем наименьшее расстояние точки А до полуплоскости [a, М) (рисунок 14). Это расстояние и будет расстоянием между точкой А и полуплоскостью [a, М).

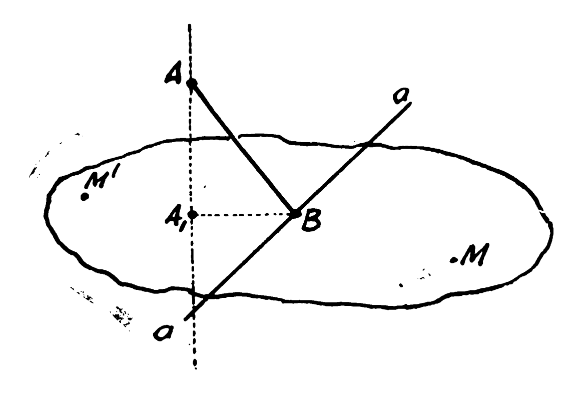


Рис. 14

Для этого проведем из точки A_1 перпендикуляр на прямую a и соединим точку B с точкой A. Отрезок [AB] перпендикулярен прямой a по теореме о трех перпендикулярах. Легко доказать, что [AB] меньше любого отрезка, соединяющего точку A с любой точкой полуплоскостью [a, M), отличной от B.

Следовательно,

$$d(A, [a, M)] = |AB|.$$

Условимся полупространство обозначать так [α, M), где α — плоскость, разделяющая все пространство на два полупространства, а M — любая точка данного полупространства.

Пространственный слой с граничными плоскостями α и β ($\alpha \| \beta$) будем обозначать так [$\alpha\beta$].

Пусть дана полуплоскость [a, M), ограниченная прямой a. Проведем через прямую a плоскость β, перпендикулярную к полуплоскости [a, M). Эта плоскость β разделит все пространство на два полупространства, в одном из которых расположена полуплоскость [a, M) (рисунок 15). Пусть то полупространство, в котором расположена полуплоскость [a, M), обозначено [β, M], второе полупространство через [β, M'). Если точка A_1 находится

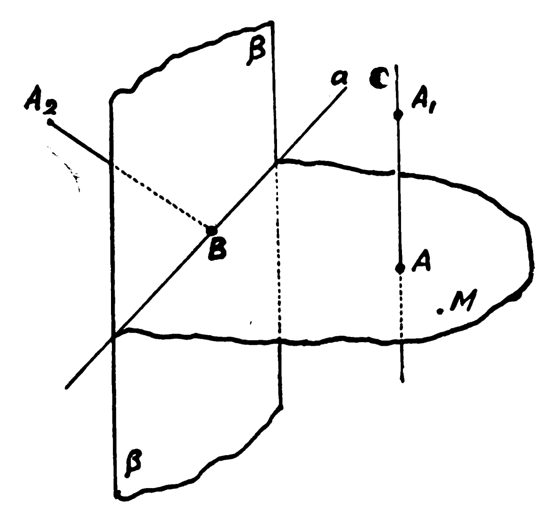


Рис. 15

в полупространстве [β, M) или на плоскости β, то ее расстояние до полуплоскости [a, M) определяется обычно, т. е. длиной отрезка перпендикуляра, опущенного на эту полуплоскость [a, M), т. е.

$$d(A_1, [a, M)) = |A_1A|.$$

Если же точка A_2 расположена в полупространстве [β, M′), то расстоянием этой точки до полуплоскости [a, M) будет длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую *a*, т. е.

$$d(A_2, [a, M)] = |A_2B|.$$

Таким образом, полупространство [β, M′) является геометрическим местом точек, расстояния которых до полуплоскости [a, M) определяются соответственно длинами отрезков перпендикуляров к граничной прямой *a* данной полуплоскости [a, M), проведенных из точек полупространства [β, M′).

10. $Ф_1$ — точка A; $Ф_2$ — полоса, ограниченная параллельными прямыми *a* и b, т. е. [*a*b].

Этот случай аналогичен случаю 4. Через прямые *a* и b (края полосы) проведем плоскости α и β, перпендикулярные плоскости полосы. Эти плоскости α и β (α‖β) разде-

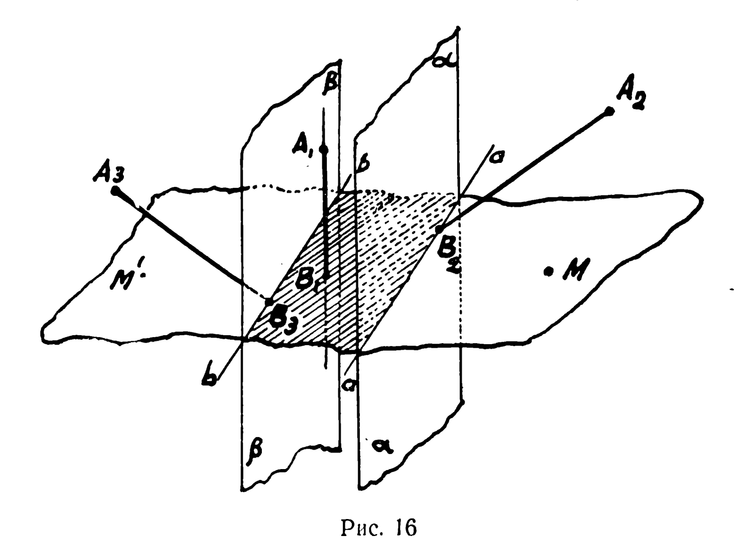


Рис. 16

лят пространство на три области: два полупространства $[a, M)$, $[\beta, M')$ и пространственный слой, ограниченный плоскостями α и β, который мы обозначим так $[\alpha\beta]$.

Полоса (ab) есть часть плоскости, определяемой прямыми a и b.

1⁰. Если $A_1 \in [\alpha\beta]$ и $(A_1B_1) \perp [ab]$, то

$$d(A_1, [ab]) = |A_1B_1|$$

2⁰. Если $A_2 \in [\alpha, M)$, то

$$d(A_2, [a, b]) = |A_2B_2|,$$

где $(A_2B_2) \perp a$.

3⁰. Если $A_3 \in [\beta, M')$, то

$$d(A_3, [a, b]) = |A_3B_3|,$$

где $(A_3B_3) \perp b$.

11. Φ_1 — прямая a; Φ_2 — прямая b.

Рассмотрим следующие случаи взаимного расположения прямых a и b.

а) Прямые a и b пересекаются. Тогда, как это следует из определения расстояния между геометрическими фигурами, будем иметь

$$d(a, b) = 0.$$

б) Прямые a и b параллельны.

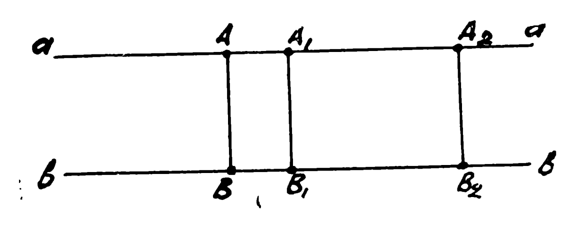


Рис. 17

Легко доказать (рисунок 17), что расстоянием между a и b будет отрезок прямой, перпендикулярной к данным прямым и заключенный между ними

$$d(a, b) = |AB| = |A_1B_1| = |A_2B_2| = \ldots$$

в) Прямые a и b — скрещивающиеся прямые (рисунок 18).

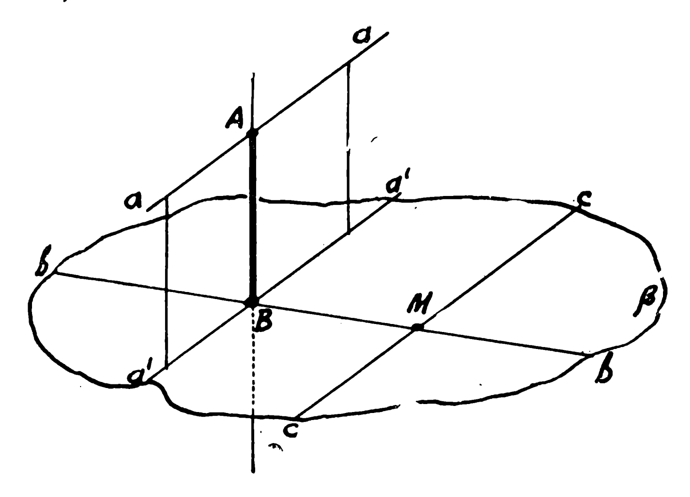


Рис. 18

Возьмем на одной из прямых (пусть b) произвольную точку M. Прямая a и точка M определяют единственную плоскость α. Проведем в этой плоскости α прямую c, параллельную a и проходящую через точку M. Прямые a и b также определяют единственную плоскость β.

Спроектируем ортогонально на плоскость β прямую a — получим

$$a' \subset \beta.$$

Через точку B проведем прямую, перпендикулярную к плоскости β, которая пересечется с прямой a в точке A. Прямая (AB) перпендикулярна к прямым a и d и ее отрезок [AB] определяет расстояние между прямыми a и b, так как он короче любого другого отрезка, соединяющего произвольную точку $X_1 \in a$ с произвольной точкой $X_2 \in b$.

Таким образом,

$$d(a, b) = |AB|.$$

12. Φ_1 — точка A; Φ_2 — сфера с центром O, не проходящая через точку A (рисунок 19).

Здесь будем иметь случаи, совершенно аналогичные случаям, рассмотренным в пункте 5, а поэтому рассмотрим только случай, когда точка A расположена вне сферы Φ_2 (случай, когда точка A лежит на сфере, не представляет интереса).

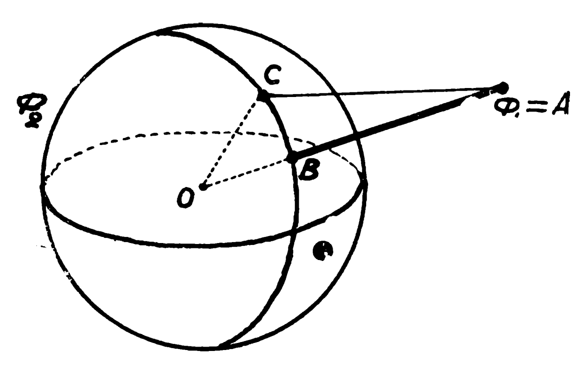


Рис. 19

Соединим точку A с O и обозначим точку пересечения отрезка [OA] со сферой через B. Докажем, что длина [AB] меньше длины любого отрезка, соединяющего точку A с любой точкой C сферы. Проведем через точки A, O, C плоскость α. Эта плоскость пересечется со сферой по окружности BC большого круга. На основании рассуждения, проведенного в пункте 5, примененного к этой окружности и к точке A, получим, что $|AB| < |AC|$.
Следовательно, так как точка C — любая на сфере, то

$$d(A, \Phi_2) = |AB|.$$

13. Φ_1 — сфера с центром O_1 и

Φ_2 — сфера с центром O_3 (рисунок 20).

Рассуждения здесь аналогичны тем, которые проведены в пункте 7, а поэтому их не приводим.

Введение определения расстояния между геометрическими фигурами дает возможность верно решить некоторые вопросы геометрии.

В работе [8] проводится анализ многих примеров применения понятия геометрического места и делается следующее заключение на стр. 9: «...В учебной и научной ли-

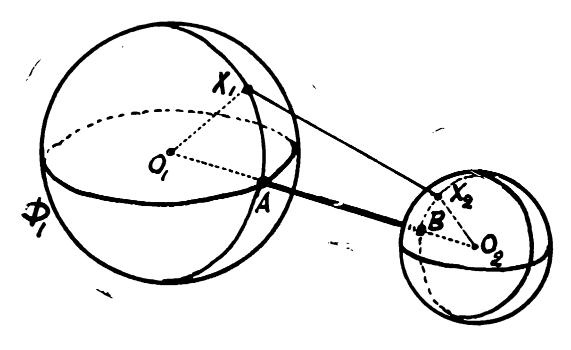


Рис. 20

тературе можно встретить различные определения понятия геометрического места вообще и понятия геометрического места точек в частности.

Оставляя в стороне рассмотрение некоторых различий в этих определениях, отметим, что:

1^0. Геометрическим местом может быть не обязательно множество точек, но и множество прямых, кривых линий, вообще, множество фигур, обладающих каким-либо общим свойством.

2^0. Фигуры, образующие геометрическое место, должны входить в объем одного определенного понятия, но не обязательно должны быть равны.

3^0. Чтобы убедиться в том, что некоторая фигура Ф есть геометрическое место фигур F, обладающих свойствами $P_1, P_2, ... P_n$ нужно доказать:

а) что каждая фигура F, обладающая свойствами P_1, $P_2, ..., P_n$, принадлежит фигуре Ф и

б) что каждая фигура F, принадлежащая фигуре Ф, обладает свойствами $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$».

В работе [9] приводится следующее определение геометрического места фигур: «Геометрическим местом фигур F, обладающих характеристическим свойством P, называется фигура Ф, которая содержит в себе фигуры F, обладающие свойством P, и вне фигуры Ф не содержится ни одной фигуры F, обладающей свойством P.

Фигуры F называются элементами Ф — их геометрического места».

В определении используется выражение «...фигура Ф, которая содержит в себе фигуры F...». Это следует пони-

мать так: фигура F, как множество точек, является подмножеством фигуры Ф, как множества точек, т. е.

$$F \subset Ф.$$

Термин «геометрическое место фигур», где в качестве F может быть взяты «точка», «прямая», «окружность», «отрезок», «треугольник» и т. д., следует употреблять и рассматривать в смысле синонима термина «множество фигур».

Совершенно ясно, что введение предложенного в самом начале определения расстояния между геометрическими фигурами не противоречит предложениям курса геометрии, а скорее всего систематизирует и объединяет воедино ряд вопросов, рассмотренных в планиметрии и стереометрии, связанных со взаимным расположением различных фигур и определением расстояния между ними.

Конечно, введение в курс геометрии этого определения несколько уточнит представление о некоторых понятиях.

Взять, например, понятие высоты треугольника, пирамиды и конуса. Не всегда возможно рассматривать длину высоты как расстояние от вершины треугольника (пирамиды, конуса) до основания.

Рассмотрим рисунки 21 и 22.

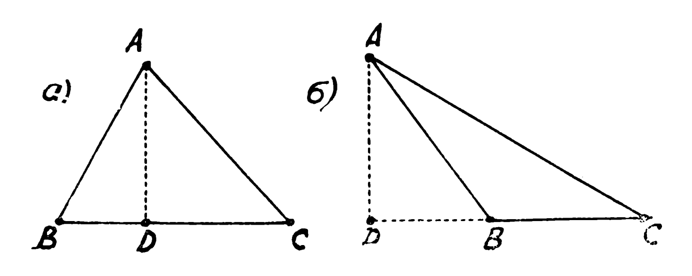


Рис. 21

Для случаев *а*) длины высот и расстояние вершин A и S до оснований [BC] и △ABC и |SO| выражаются одним и тем же числом |AD| для △ABC и |SO| для пирамиды SABC.

В случае же *б*) придется отличать длину высоты фигуры от расстояния между вершиной и основанием. Так для

$\triangle ABC$ (рисунок 21 б) высотой треугольника служит отрезок $[AD]$, перпендикулярный к прямой (BC), а расстоянием вершины A до основания $[BC]$ служит длина $|AB|$.

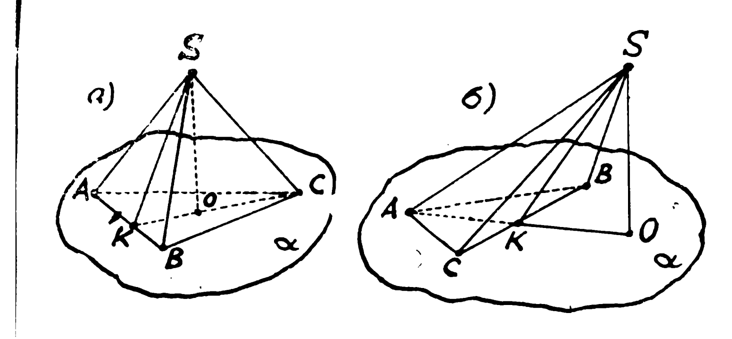


Рис. 22

Для пирамиды $SABC$ (рисунок 22б) высотой является отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость α, в которой лежит $\triangle ABC$, а расстоянием между вершиной и основанием ABC является длина $|SK|$ высоты грани SBC, если его гранью является остроугольный треугольник, или $|SB|$, если $\triangle SBC$ — тупоугольный.

Такое разграничение понятий высоты и отрезка, длина которого является расстоянием от вершины фигуры до ее основания, хорошо подчеркивает понятие высоты, как характеристики возвышения (удаления) вершины треугольника над прямой, на которой лежит его основание, и возвышения вершины пирамиды над плоскостью, на которую поставлена пирамира своим основанием.

Придется также уточнить представление и о биссектрисе угла, как о геометрическом месте точек, равноудаленных от сторон угла.

Почти во всех школьных учебниках геометрии (А. П. Киселева, Н. Н. Никитина, Ю. О. Гурвица и Р. В. Гангнуса, А. Давыдова и др.) биссектриса угла определяется как луч, делящий угол пополам, и в то же время ее называют геометрическим местом точек (или множеством точек), равноудаленных от сторон этого угла. Получается, что, не вводя определения расстояния точки до луча, определяется множество точек, равноудаленных от лучей,

образующих угол, причем доказательства приводятся только для острого угла.

Возьмем угол, больший развернутого и построим его биссектрису (рисунок 23). Взяв на биссектрисе [OC)

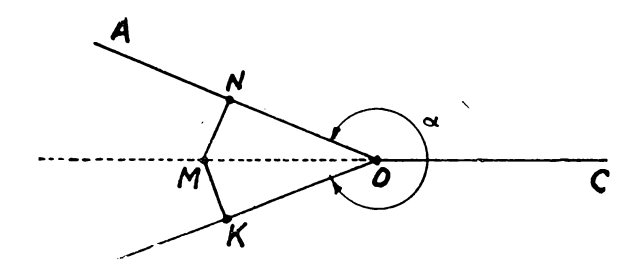


Рис. 23

точку, мы, согласно утверждению (доказанному!), что биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, должны уметь строить отрезки, определяющие расстояния точек биссектрисы до сторон угла. На этот счет существовало неявное, невысказанное и незаписанное нигде (!) соглашение о том, что за расстояние между точкой и лучем (и отрезком) следует считать длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на прямую луча (отрезка). Поскольку биссектриса по определению луч, то других точек, кроме лежащих на биссектрисе, мы брать не должны. Но ведь точки, лежащие на дополнительном луче [OC_1), также равноудалены от сторон угла (на чертеже [MN] = [MK]). Получается противоречие с общепринятым понятием геометрического места точек. Ведь геометрическим местом точек может быть только множество таких точек, которые **все** обладают определенным свойством, и вне этого множества не должно быть точек, удовлетворяющих этому свойству. В этом же случае точка M не принадлежит биссектриссе невыпуклого угла AOB, но... равноудалена от сторон угла.

Следовательно, в утверждении, что биссектриса угла есть множество точек (или геометрическое место точек), равноудаленных от сторон угла, нужны определенные уточнения, коррективы. Не случайно в таких курсах элементарной геометрии, как у Ж. Адамара, Д. И. Перепел-

кина, Н. Извольского, Б. В. Кутузова и др., биссектриса угла не рассматривается как геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. В этом отношении выгодно отличается от других учебное пособие [4]. Во-первых, в нем дается понятие о расстоянии между геометрическими фигурами и, во-вторых, при рассмотрении свойства биссектрисы угла сделано ограничение рассмотрения этого вопроса для углов, меньших 180°.

Однако это ограничение не мотивировано и в формулировке завершающей теоремы осталась традиционная неточность:

«Теорема (о точках биссектрисы угла). Множеством всех точек угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла».

Введенное ограничение необходимо включить в формулировку теоремы.

Рассмотрим этот вопрос с учетом введенного выше уточненного понятия о расстоянии между геометрическими фигурами. Итак, перед нами стоит задача:

«Найти множество всех точек угла, равноудаленных от его сторон».

Следуя учебному пособию [4], будем понимать под углом фигуру, состоящую из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

Изучим два различных случая:

1^0. Данный угол α есть выпуклая фигура, т. е.

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 180°.$$

2^0. Данный угол α есть невыпуклая фигура, т. е.

$$180° < \alpha \leqslant 360°.$$

Случай 1^0 рассмотрен во многих учебниках, в том числе и в [4] и получен такой вывод:

«Множеством всех точек **выпуклого** угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла».

Рассмотрим невыпуклый угол AOB (рисунок 24). Проведем через вершину угла две прямые l_1 и l_2, перпендикулярные к сторонам угла.

Полуплоскости $[l_1, M)$ и $[l_2, M)$ являются геометрическими местами точек плоскости, расстояния которых соответственно до лучей [OA) и [OB) определяются длиной отрезка, соединяющего точки этих полуплоскостей с началом лучей O (смотрите случай 3, рисунок 6). Пересечение

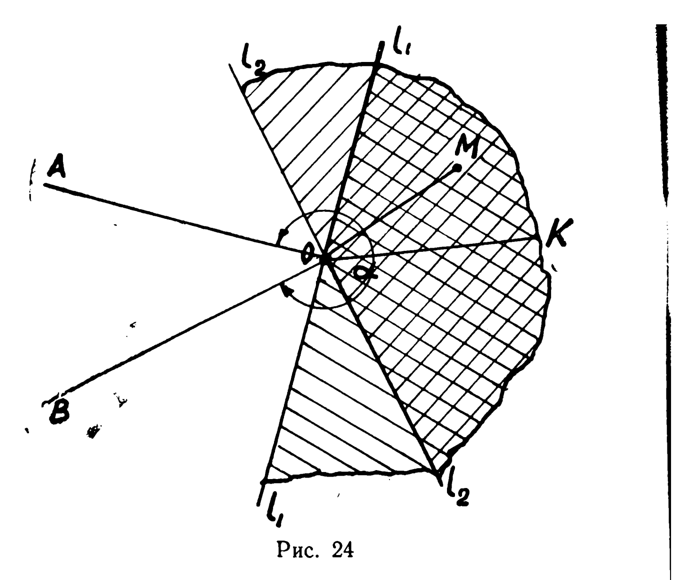


Рис. 24

этих полуплоскостей образует угол COD, внутренняя область которого заштрихована дважды.

$$[l_1, M) \cap [l_2, M) = \angle COD,$$

$$0 < \angle COD \leqslant 180°.$$

Расстояние любой точки M угла COD до сторон угла AOB определяется длиной отрезка [OM], т. е. угол COD есть множество всех точек данного невыпуклого угла, равноудаленных от его сторон.

Таким образом, геометрическим местом точек невыпуклого угла, равноудаленных от его сторон, является не биссектриса этого угла, а выпуклый угол COD, являющийся частью данного угла AOB, со сторонами [OC) и [OD), соответственно перпендикулярными сторонами [OA) и [OB) данного угла. Биссектриса же [OK) невыпуклого угла AOB является только равноделящей.

Таким образом, приходим к выводу: множеством всех точек невыпуклого угла, равноудаленных от его сторон, является выпуклый угол, являющийся частью данного угла и имеющий стороны, соответственно перпендикулярные к сторонам данного угла.

Как раз рассмотрение случая 2^0 не приводится в школьных учебниках. Рассмотрим решение еще одной задачи, представляющей некоторый интерес для учителя математики школы:

«Найти множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон данного угла».

Рассмотрим следующие частные случаи:

1^0. Данный угол α выпуклый, т. е.

$$O \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ.$$

При решении этой задачи мы должны искать нужные нам точки не только во внутренней области угла, но и во внешней. Рассмотрим рисунок 25.

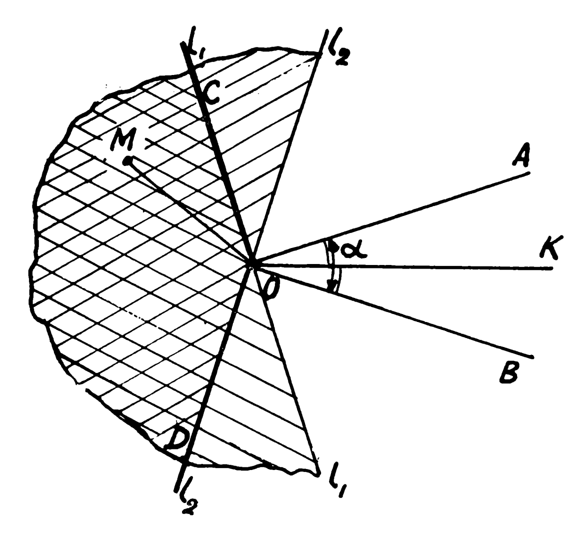


Рис. 25

Разобьем решение нашей задачи на две части:

а) найдем множество всех точек данного угла AOB, *равноудаленных от его сторон;*

б) найдем множество всех точек внешней части для данного угла AOB, равноудаленных от сторон угла. Заметим, что внешней частью для выпуклого угла AOB, является невыпуклый угол AOB.

В случае а искомым множеством точек будет луч [OK) — биссектрисса $\angle AOB$.

В случае б множеством всех точек невыпуклого угла AOB, равноудаленных от его сторон, являются выпуклый $\angle COD$, который является частью невыпуклого $\angle AOB$ и стороны [OC) и [OD) которого соответственно перпендикулярны сторонам [OA) и [OB), т.е. $[OC) \perp [OA)$, $[OD) \perp [OB)$.

Объединяя а и б, получим вывод:

Множеством всех точек плоскости, равноудаленных от сторон выпуклого угла, является объединение биссектрисы данного угла и выпуклого угла со сторонами, соответственно перпендикулярными сторонами данного угла, т. е.

$$[OK) \cup \angle COD,$$

причем

$$\angle COD=[l_1, M)\ [l_2, M). \cup$$

2^0. Данный угол α невыпуклый, т.е.

$$180^\circ < \alpha \leqslant 360^\circ.$$

Рассмотрим рисунок 26. Опять решение задачи разобьем на части:

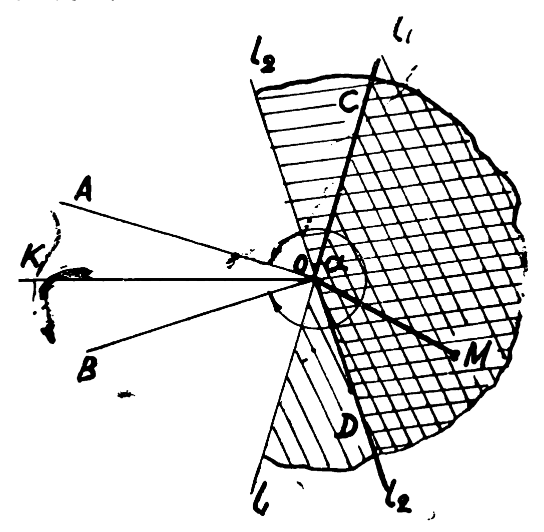


Рис. 26

а) найдем множество всех точек данного **невыпуклого** угла AOB, равноудаленных от его сторон;

б) найдем множество всех точек внешней части для данного невыпуклого угла AOB, равноудаленных от сторон угла. Также заметим, что теперь внешней частью для невыпуклого угла AOB является выпуклый угол AOB.

В случае а искомым множеством точек невыпуклого угла AOB, равноудаленных от его сторон, будет выпуклый угол COD, являющийся частью данного угла и стороны которого [OC) и [OD) соответственно перпендикулярны сторонам данного угла [OA) и [OB), т. е.

$$[OC) \perp [OA), \ [OD) \perp [OB).$$

В случае б искомым множеством точек внешней части для данного невыпуклого угла AOB, т. е. выпуклого AOB, является биссектриса [OK).

Объединяя а и б, получим вывод:

«Множеством всех точек плоскости, равноудаленных от сторон данного **невыпуклого** угла, является объединение выпуклого угла со сторонами, соответственно, перпендикулярными сторонам данного угла* и биссектрисы выпуклого угла, являющегося внешней частью плоскости для данного угла, т. е.

$$\angle COD \cap [OK),$$

причем

$$\angle COD = [l_1, M) \cap [l_2, M)".$$

После решения последних двух задач стало достаточно ясно, что следует рассматривать все случаи для углов в границах от 0° до 360° и единого ответа нет. Следует различать достаточно четко содержания условий этих задач.

В формулировку теоремы о свойстве биссектриссы угла следует внести необходимые уточнения, имея в виду, что биссектриса угла является геометрическим местом

---

* Отмечать каждый раз, что выпуклый ∠COD в случаях 1° и 2° есть часть невыпуклого угла, нет необходимости, так как прилагательное **«выпуклый»** и утверждение, что его стороны [OC) и [OD) соответственно перпендикулярны [OA) и [OB) вполне его определяют.

точек или множеством всех точек, равноудаленных от сторон угла, только тогда, когда:

1) Точки берутся во внутренней области угла или точки принадлежат углу.

2) Рассматривают угол α выпуклый, т. е.

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ.$$

Если же нарушить одно из этих условий, то биссектриса угла не будет являться геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, а будет просто лучом, делящим угол на две равные части, т. е. равноделящей, что точно соответствует ее имени.

Совершенно аналогично решается вопрос об определении множества точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла и о множестве точек двугранного угла, равноудаленных от его граней.

В заключение отметим, что введение предложенного выше определения расстояния между геометрическими фигурами не противоречит предложениям школьного курса геометрии, а способствует систематизации и объединению ряда вопросов, рассмотренных в планиметрии и стереометрии, связанных со взаимным расположением различных фигур и определением расстояния между ними.

Уточненное представление о расстоянии между геометрическими фигурами соответствует жизненной практике человека. Расстояние следует понимать как кратчайший путь, которым нужно пройти, чтобы из одной точки попасть в другую.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. Введение в общую теорию множества и функций. М.—Л., 1948.

2. П. С. Александров, А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного. М.—Л., 1938.

3. Н. Извольский. Геометрия на плоскости (планиметрия). М.—Петр., 1923.

4. А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Геометрия 6 класс. М., 1972.

5. А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Геометрия 7 класс. М., 1971.

6. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М. — Л., 1937.

7. Ю. А. Шиханович. Введение в современную математику. Начальные понятия. М., 1965.

8. Г. В. Шичалин. Геометрические места в пространстве и методика их изучения в курсе геометрии средней школы. Махачкала, 1961.

9. Г. В. Шичалин. Геометрические места в пространстве и методика их изучения в курсе геометрии средней школы. Диссертация. М., 1962.

Т. Е. НИКОЛАЕВСКАЯ

ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ

Развитию логического мышления учащихся в школе уделяется все больше внимания. Одна из основных целей школьного преподавания — научить решать задачи, доказывать теоремы, т. е. находить логические связи между отдельными явлениями и предметами.

По новым программам уже шестиклассники будут знакомиться с аксиоматическим построением курса геометрии, встретятся с понятиями «обратная», «противоположная» теоремы, «необходимые и достаточные условия». Более подробно аксиоматический метод в математике ученики будут изучать в IX классе.

Ясно, что изложить сложные вопросы аксиоматики с различной степенью строгости, учитывая возрастные особенности школьников, может только учитель, который сам хорошо знает курс в целом, представляет его структуру, логическую взаимосвязь между различными темами, понятиями, теоремами.

С этими вопросами студенты педагогического института знакомятся при изучении раздела высшей геометрии — основания геометрии. По новой вузовской программе вопросы оснований геометрии входят в общий курс геометрии.

Наблюдения показали, что описываемый в статье метод проведения практических занятий по высшей геометрии способствует улучшению теоретической и методической подготовки будущих учителей математики.

На первом же занятии по основаниям геометрии студенты знакомятся с планом работы, с требованиями преподавателя, предупреждаются о том, что результаты контрольных и самостоятельных работ, коллоквиумов и текущей успеваемости учитывают на экзамене. На этом же занятии студенты получают перечень теоретических вопросов курса, которые будут включены в контрольную работу. Вопросы теории вводятся и в каждое домашнее задание.

Первые два занятия посвящаются повторению понятий, необходимых для строгого построения теории. Виды определений, виды теорем, необходимое и достаточное условия, понятия и соотношения между ними, содержание и объем понятия — все это разбирается на теоремах, определениях, знакомых студентам из школьного курса геометрии.

На втором занятии проводится 15-минутная самостоятельная работа, которая состоит из двух заданий:

1. Выбрать из учебника геометрии любую теорему, сформулировать эту же теорему со словами «необходимо, достаточно».

2. Изобразить с помощью кругов Эйлера отношение по объему между перечисленными понятиями.

Для выполнения первого задания каждый студент получает школьный учебник геометрии.

На практических занятиях студенты учатся излагать свои мысли точно и кратко. Этому способствует использование символики. В записи решения задач на доске и в тетрадях используются следующие обозначения:

A, B, C,... — точки,

a, $в$, c,...—прямые,

α, β, γ,... — плоскости,

$\exists$ — существует,

$\forall$ — любой, каждый,

$\ni$ — принадлежат друг другу, инцидентны,

$=>$ — следует, вытекает,

$\cap$ — пересекаются,

$=$ — конгруэнтны,

I_1 — первая аксиома из первой группы аксиом Гильберта.

T_I^1 — первая теорема, доказываемая с помощью I группы аксиом Гильберта.

Черта над знаком говорит об отрицании данного соотношения.

Четыре занятия посвящаются решению задач, доказательству теорем, основанных на аксиоматике Гильберта. Основное внимание уделяется следствиям из I и III групп аксиом, начиная с самых простейших, таких, как:

T_I^1 Две прямые не могут иметь более одной общей точки.

T_I^4 Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит одна и только одна плоскость.

Например, решение T_I^4 проводится так.

Дано: l, $C \overline{\ni\in} l$.

Доказать: $\exists\, \alpha : l, C \ni\in \alpha$ — единственная.

Решение задачи начинается с анализа и составления списка аксиом, нужных для доказательства.

— В какой аксиоме говорится о существовании плоскости? (в аксиоме I^4).

— Что достаточно для построения плоскости? (три точки, не лежащие на одной прямой).

— Нам дана одна точка, еще две точки можно взять на прямой (используем I^3). Таким образом, начинать решение задачи надо с использования аксиом I^3, I^4.

Записываем доказательство $\exists\, A, B \ni\in l$ (I^3)

$\exists\, \alpha : A, B, C \ni\in \alpha$ (I^4)

— Полностью ли доказана теорема? Мы нашли плоскость, проходящую через три точки. Требуется доказать, что $l \ni\in \alpha$.

Это следует из аксиомы I^6: «Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит данной плоскости», т. е. прямая принадлежит плоскости. $l \ni\in \alpha$ (I^6, определение прямой, принадлежащей плоскости).

Осталось доказать единственность такой плоскости. Предположим противное, т. е. $\exists\, \beta : l, C \ni\in \beta$; $l \ni\in \beta$ значит, $A, B, C \ni\in \beta$, кроме того, $A, B, C \ni\in \alpha$. Это противоречит

аксиоме I^5, в которой говорится, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости. Следовательно, предположение было сделано неверно, плоскость $\alpha : l, C \ni \alpha$ — единственная.

Запись на доске:

Предположим: $\exists \beta : l, C \ni \beta \Rightarrow A, B, C \ni \beta$ } противо-
по доказанному $A, B, C \ni \alpha$ } речат I^5.

Следовательно, предположение было сделано неверно, α — единственная.

И вот такие простые теоремы на первых занятиях студенты доказывают с большим трудом. Они не всегда понимают, что нужно доказать, иногда применяют много лишних аксиом и теорем, с трудом понимают разницу между словами «не более одной», «по крайней мере одна», «одна и только одна» и другие.

Понятно, что в домашних работах допускается много ошибок, а поэтому домашнее задание каждый раз проверяется. Проверка проводится по-разному. Иногда студент у доски рассказывает решение задачи, а остальные слушают, затем исправляют, дополняют, предлагают иные способы доказательства.

Другой способ проверки: студенты перечисляют номера аксиом и теорем, которые использовались ими при доказательстве, записывают их на доске. Различных вариантов доказательства набирается обычно 5—6. Из всех перечисленных способов выбирается верный и наиболее рациональный. Обсуждение задач проходит активно.

Кроме того, просматриваются тетради студентов, отмечается количество нерешенных задач. На следующем занятии студенты показывают решенные задачи — задолженность с них снимается.

Вначале просматриваются все тетради, а впоследствии — выборочно.

Постепенно переходим к более сложным теоремам. Например:

T_I^8 На каждой плоскости существует по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой.

T_{III}^9 Каждый отрезок имеет единственную середину.

Уже вполне самостоятельно студенты доказывают следующую теорему:

III^{10} Каждый угол имеет единственную биссектрису.

Приятно отметить, что на последующих занятиях многие студенты уже не допускают ошибок при доказательстве, замечают ошибки других.

Например, доказывали теорему:

$\text{T}_{\text{III}}^{13}$Через всякую точку плоскости проходит единственный перпендикуляр к данной прямой, лежащей в этой плоскости.

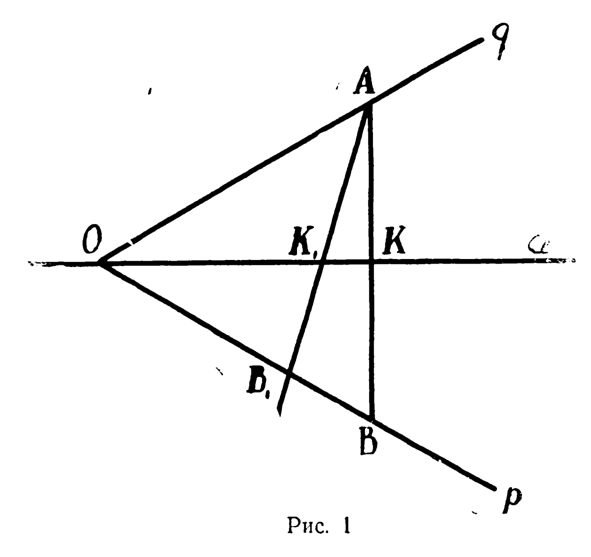


Рис. 1

Рассмотрим случай $A \overline{\ni} a$. После того, как прямая AB построена ($\angle(q, a) = \angle(p, a)$, $OA = OB$), доказано, что $AB \cap a$, $AB \perp a$ ($\angle AKO = \angle OKB$ (III^5). Равные смежные углы называются прямыми. Начали доказывать единственность такого перпендикуляра методом от противного.

Провели $AK_1 \perp a$ ($\angle AOK_1 = \angle OK_1B_1$), рассмотрели $\triangle OAK_1$ и $\triangle OK_1B_1$ ($\angle OAK_1 = \angle K_1OB_1$, $OK_1 = OK_1$, $\angle OK_1A = \angle OK_1B_1$) $=>$ ($\triangle OAK_1 = \triangle OB_1K_1$, $=>$ ($OB_1 = OA$).

А мы строили $OB = OA$, получили противоречие с аксиомой III^1 (от одной точки, на одной прямой, в одном и том же направлении отложили два отрезка, конгруэнтные одному и тому же).

Следовательно, предположение, что $AK_1 \perp a$—неверно, т. е. АК — единственный перпендикуляр к прямой a из точки А. Студенты сразу заметили ошибку в доказательстве. Не доказано, что $AK_1 \cap OB = B_1$ (существование точки B_1). И предложили другое доказательство: соединили K_1 с В; рассмотрели $\triangle OAK_1$ и $\triangle OBK_1$.

$$(OA=OB;\ OK_1=OK_1,\ \angle AOK_1=\angle BOK_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\triangle OAK_1 = \triangle OBK_1) \Rightarrow (\angle OK_1A=\angle OK_1B).$$

По предположению $\angle OK_1A$ — прямой, следовательно, и $\angle OK_1B$ — прямой, следовательно, они смежные, т. е. А, K_1, В принадлежат одной прямой. Через две точки А и В проведены две прямые. Получили противоречие с аксиомой I^2.

Предположение было сделано неверно, АК — единственный перпендикуляр.

В процессе преподавания высшей геометрии постоянно показывается связь со школьным курсом геометрии. Отмечается сходство и различие между этими предметами, студенты убеждаются в необходимости вдумчивого отношения к доказательству школьных теорем.

На занятиях рассматривались доказательства теорем, данные в школьном учебнике. Например: внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним.

Студенты должны были найти, в чем недостаточная строгость доказательства. Они убеждаются, что при доказательстве школьных теорем употребляются ссылки на наглядность (на чертеж).

На седьмом занятии проводится контрольная работа, в которую включаются теоретический вопрос, задача, решенная в аудитории или дома, и новая задача. Причем теоретический вопрос формулируется не точно так, как назван параграф в учебнике или тема на лекции, а в такой форме, чтобы студент не мог отвечать на вопрос заученными фразами. Этим проверяется понимание предмета.

Например: 1. Почему аксиоматический метод принимает некоторые понятия без определения и некоторые предложения без доказательства?

2. Определить отношение эквивалентности; привести примеры; какие свойства эквивалентности постулируются Гильбертом?

3. Как Гильберт определяет угол между двумя прямыми? Сравнить со школьным определением.

Опыт показывает, что студенты неглубоко усваивают понятия неевклидовой геометрии Лобачевского, если об этом говорится только на лекциях. Поэтому в практические занятия включается доказательство теорем неевклидовой геометрии Лобачевского. Например: свойство транзитивности параллельных прямых; о прямых равного наклона; о сверхпараллельных; о сумме углов треугольника, понятия и свойства эквидистанты.

В заключение занятий устраивается устный коллоквиум. Его обычно проводят вместе преподаватель, который читает лекции, и ассистент. Вопросы подбираются так, чтобы обобщить весь пройденный материал.

Чтобы опросить большее число студентов, два-три человека вызываются к доске для подготовки. В это время кто-то отвечает устно. Кроме того, три-четыре студента приглашаются для проверки ответов у доски.

К доске обычно вызываются слабые студенты, а для проверки их ответов — более сильные, так как проверять и дополнять ответы, конечно, сложнее.

В итоге такой подготовки экзамен по основаниям геометрии студенты обычно сдают успешно. Результаты контрольной работы, коллоквиума и текущей успеваемости учитываются на экзамене.

О том, что геометрия может быть построена не только с помощью аксиоматического метода, но и с помощью теоретико-группового, говорится на лекциях по основаниям геометрии. Но на практических занятиях на II курсе студенты пользуются только аксиоматическим методом. Теоретико-групповой метод в геометрии более подробно рассматривается на практических занятиях по проективной и аффинной геометриям на III курсе.

На практические занятия выносятся такие вопросы:

1. Различные группы преобразований — 2 часа
2. Решение задач на родственное соответствие — 3 часа
3. Контрольная работа — 1 час
4. Аффинные преобразования плоскости. Решение элементарных задач методом аффинной геометрии — 2 часа

5. Аналитическое выражение аффинных преобразований 3 часа

6. Контрольная работа 1 час

7. Аксиомы проективной геометрии и принципы двойственности 3 часа

8. Теорема Дезарга 3 часа

9. Гармонические четверки элементов 2 часа

10. Контрольная работа 2 часа

11. Задание проективного соответствия между образами первой ступени 4 часа

12. Линии второго порядка. Теоремы Паскаля и Брианшона 6 часов

13. Контрольная работа 2 часа

В контрольные работы включаются вопросы теории. Вот, например, один из вариантов первой контрольной работы.

1. Образует ли группу совокупность всех вообще преобразований гомотетии на плоскости?

2. Является ли преобразование гомотетии плоского поля в себя перспективно-аффинным?

3. Какое преобразование называется движением? Какие частные виды перспективно-аффинного преобразования являются движениями?

При изучении проективной и аффинной геометрии связь со школьным курсом геометрии не нарушается. Решаются элементарные задачи, сравниваются со школьными методами решения. Часто оказывается, что методы аффинной геометрии упрощают решение задач.

Практические занятия по высшей геометрии, на наш взгляд, приносят большую пользу студентам. Они расширяют их кругозор, приучают мыслить логически, на практике показывают силу аксиоматического метода, убеждают в возможности существования многих, отличных друг от друга, геометрий, дают большой дополнительный материал для проведения факультативных и кружковых занятий в школе.

Г. С. ПРОКОПЬЕВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ШЕСТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ НОМОГРАММОЙ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С ОТВЕТНЫМ БИНАРНЫМ ПОЛЕМ

Пусть
$$t_6 = f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \qquad (1)$$
есть вещественное уравнение, определенное в некоторой прямоугольной области G: $a_j < t_j < b_j$ $(j=1,\dots 5.)$ изменения переменных t_j. При этом считаем, что однозначная функция $f(t_1,\dots,t_5)$ обладает достаточным числом непрерывных производных по всем переменным; производные $\frac{\partial f}{\partial t_j}$ $(j=1,2,4)$ отличны от нуля в любой точке области; производные $\frac{\partial f}{\partial t_к}$ $(к=3, 5)$ или также отличны от нуля в любой точке области G, или тождественно равны нулю в G. Последнее означает, очевидно, просто отсутствие соответствующей переменной в уравнении (1).

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с представлением уравнения (1) в виде номографируемой канонической формы
$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 0 \\ f_{56} & g_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$
и некоторых ее частных случаев.

Функции $f_{iк}(t_i, t_к)$ $(i=1, 3, 5;\ к=i+1)$ формы (2) считаем также достаточно гладкими. Каноническая форма (2) может быть геометрически интерпретирована, например, номограммой из выравненных точек с прямолинейной бинарной шкалой переменных t_3, t_4 и бинарными полями пар переменных t_1, t_2 и t_5, t_6.

Значительное число работ, посвященных решению проблемы общей анаморфозы для уравнений со многими (больше трех) переменными, указывает на важность этой темы как для теоретической, так и для практической номографии. Отметим, например, работы Г. Я. Ко-

робицыной [1, 2], в которых были получены предварительные условия номографируемости бинарными номограммами самого общего вида (с тремя бинарными полями) и дано решение проблемы общей анаморфозы для уравнения (1) номограммами типа Сен-Робера и типа Коши, то есть номограммами нулевого и первого жанров.

Понятие жанра номограммы, употребляемое для номограмм из выравненных точек с тремя переменными, мы здесь распространяем на бинарные номограммы. Под жанром бинарной номограммы понимаем число 3 — к, где к — число бинарных (или одинарных) прямолинейных шкал этой номограммы.

Отсюда следует, что каноническая форма (2) геометрически интерпретируется номограммой второго жанра. Условия представимости уравнения (1) номограммами второго жанра, когда ответная переменная t_6 в паре с переменной t_5 принадлежит прямолинейной бинарной шкале, указаны в ранней работе автора [3].

Здесь рассмотрен другой, существенно отличный и не освещенный в литературе случай, когда ответная переменная t_6 вместе с переменной t_5 образуют бинарное поле. Поле переменных t_1, t_2 считаем невырожденным в любой подобласти из области G.

Обозначим $$M_j = - \frac{\partial f}{\partial t_j} : \frac{\partial f}{\partial t_4} \quad (j=1,2,3,4) \qquad (3)$$

Тогда в рассматриваемом нами случае в силу условий шкальности имеем

$$M_1^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4} \equiv A \neq O, \qquad (4)$$

$$(M_3)'_{t_j} = 0 \quad (j=1,2) \qquad (5)$$

в каждой точке области G[3].

Замечание.

В дальнейшем потребуются некоторые тождества, справедливые для любого уравнения (1), независимо от его номографируемости:

$$(M_j)'_{t_k} - (M_k)'_{t_j} \equiv M_j (M_k)'_{t_4} - M_k (M_j)'_{t_4} \; (j,k = 1,2,3,4) \qquad (6)$$

$$M_1\left(\frac{M_2}{A}\right)'_{t_4}-M_2\left(\frac{M_1}{A}\right)'_{t_4}\equiv 1, \qquad (7)$$

$$M_1\left[A\left(\frac{M_2}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4}-M_2\left[A\left(\frac{M_1}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4}\equiv 0, \qquad (8)$$

$$M_1 B_2 - M_2 B_1 \equiv M_1\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_1}, \qquad (9)$$

где

$$B_j=(\ln M_1)'_{t_j}-A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4} \quad (j=1,2) \qquad (10)$$

Тождество (6) впервые было установлено в работе [3]. Тождества (7)—(9) легко устанавливаются непосредственным вычислением их левых частей.

ЛЕММА 1.

Если функции M_j (3) в некоторой области G удовлетворяют равенствам (5), то в той же области G выполняются условия

$$(\ln M_j)'_{t_k}+M_k(\ln M_j)'_{t_4}=(M_k)'_{t_4} \quad (j=1,2;\ k=3,4) \qquad (11)$$

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_k}+M_k\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4}=0 \quad (k=3,4) \qquad (12)$$

$$(\ln A)'_{t_k}+M_k(\ln A)'_{t_4}=(M_k)'_{t_4} \quad (k=3,4) \qquad (13)$$

Справедливость равенств (11) следует непосредственно из тождеств (6), если учесть условия (5): $(M_3)'_{t_j}=0$ $(j=1,\ 2)$. Далее, покажем, например, справедливость равенств (13). Последовательно имеем

$$(\ln A)'_{t_k}+M_k(\ln A)'_{t_4}=\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_k}+M_k\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4}+2(M_k)'_{t_4}=$$

$$=\frac{M_1^2}{A}\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_k}+M_k\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4}+(M_k)'_{t_4}=(M_k)'_{t_4}.$$

Введем следующие обозначения

$$N_j=(\ln M_1)'_{t_j}+M_j(\ln M_1)'_{t_4} \quad (j=1,2) \qquad (14)$$

$$(f_{12})'_{t_1} = x_1, \quad (g_{12})'_{t_j} = y_j, \quad (y_1)'_{t_j} = y_{1j} \quad (j=1,2) \qquad (15)$$

$$\frac{f_{34}}{g_{34}} = F, \quad F'_{t_4} = x_4, \quad (x_4)'_{t_4} = x_{44} \qquad (16)$$

$$\frac{x_1 - Fy_1}{x_4} = \Phi \qquad (17)$$

ТЕОРЕМА 1.

Уравнение (1) тогда и только тогда представимо в виде (2), если существует решение относительно функций f_{12}, g_{12}, F системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(f_{12})'_{t_2} = \frac{M_2}{M_1} x_1 + \left(y_2 - \frac{M_2}{M_1} y_1\right)F, \\ &(x_1)'_{t_j} = (N_j x_4 + M_j x_{44})\Phi + (M_1 y_j + M_j y_1)x_4 + \\ &\qquad + Fy_{1j} \quad (j=1,2) \\ &F'_{t_3} = -M_3 x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Кроме того, если система (18) совместна, то существует ее решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &f_{12} = -1, \quad g_{12} = 0, \quad F = 1, \\ &x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad x_4 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

в произвольной точке $t_j = t_{j1}$ $(j=1, 2, 3, 4)$ области G.

Первая часть этой теоремы может быть получена, как частный случай, из теоремы, доказанной Г. Я. Коробицыной [1]. Для этого нужно ввести обозначения (14)—(17) в необходимые и достаточные условия представимости уравнения (1) номограммами с тремя бинарными полями (предварительные условия номографируемости), впервые установленные в работе [1].

Далее, система (18) допускает шестипараметрическую группу коллинеаций плоскости номограммы, соответствующей уравнению (2), группу автоморфизмов относительно несобственной прямой:

$$\begin{aligned} &\bar{x} = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}, \\ &\bar{y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{32} \end{aligned} \qquad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (20)$$

Начальные условия (19) позволяют единственным образом определить параметры преобразования (20). При этом получаем

$$|a_{ik}| = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{F}\bar{y}_1)^2}{\bar{x}_4} \neq 0$$

Предположение $\bar{x}_1 - \bar{F}\bar{y}_1 = 0$ влечет за собой равенство $A=0$, что противоречит (4).

Функции в уравнении (2) считаем достаточно гладкими. Поэтому рассматривая условия интегрируемости системы (18) и присоединяя к ней получающиеся при этом уравнения, вводящие дополнительные условия на функции системы (18) [4], можем привести эту систему к каноническому виду.

Из условия $(f_{12})''_{t_2 t_4} = 0$ получаем

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4} x_1 + \left(y_2 - \frac{M_2}{M_1} y_1\right) x_4 - \left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4} F y_1 = 0 \qquad (21)$$

Тогда из первого уравнения системы (18) и уравнения (21) находим:

$$(f_{12})'_{t_j} = \frac{M_j}{M_1} x_1 - \left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4} \Phi F, \quad (j = 1, 2) \qquad (22)$$

$$(g_{12})'_{t_j} = \frac{M_j}{M_1} y_1 - \left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4} \Phi \quad (j = 1, 2) \qquad (23)$$

Из условий $(g_{12})''_{t_2 t_к} = 0$ $(к=3, 4)$ в силу равенств (12) получаем

$$(x_4)'_{t_к} = \left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_к} x_4 + 2M_к \frac{y_1 x_4}{\Phi} \quad (k = 3, 4) \qquad (24)$$

Заменяя во втором уравнении системы (18) x_{44} его значением из (24) и $y_j = (g_{12})'_{t_j}$ из (23), находим

$$(x_1)'_{t_j} = \left[N_j + M_j \left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4} - M_1 \left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4}\right] (x_1 - F y_1) + $$
$$+ F y_{1j} \quad (j = 1, 2) \qquad (25)$$

Упрощая в этом уравнении коэффициент при $x_1 - Fy_1$ последовательно имеем:

$$N_j + M_j\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4} - M_1\left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4} = \ln(M_1)'_{t_j} + M_j(\ln M_1)'_{t_4} +$$

$$+ M_j(\ln A)'_{t_4} - 2M_j(\ln M_1)'_{t_4} - (M_j)'_{t_4} + M_j(\ln M_1)'_{t_4} =$$

$$= (\ln M_1)'_{t_j} - A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4} = B_j$$

Таким образом,

$$(x_1)'_{t_j} = B_j(x_1 - Fy_1) + Fy_{1j} \quad (j = 1,2) \tag{25'}$$

Далее, из условий $(x_4)''_{t_4 t_j} = 0$ $(j=1,2)$ находим

$$\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j} - 2x_4\frac{x_1(y_1)'_{t_j} - y_1(x_1)'_{t_j}}{(x_1 - Fy_1)^2} = 0 \quad (j=1,2) \tag{26}$$

Разрешая уравнения (25′) и (26) относительно $(x_1)'_{t_j}$ и $(y_1)'_{t_j}$, получаем

$$(x_1)'_{t_j} = B_j x_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\Phi F \tag{27}$$

$$(y_1)'_{t_j} = B_j y_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\Phi \tag{28}$$

Таким образом, имеем следующий результат:

ЛЕММА 2.

Система дифференциальных уравнений (18) при условии $A \neq 0$ и $(M_3)'_{t_j} = 0$ $(j=1,2)$ в каждой точке области G эквивалентна следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$(f_{12})'_{t_j} = \frac{M_j}{M_1}x_1 - \left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4}\Phi F,$$

$$(g_{12})'_{t_j} = \frac{M_j}{M_1}y_1 - \left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4}\Phi,$$

$$(x_1)'_{t_j} = B_j x_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j} \Phi F,$$

$$(y_1)'_{t_j} = B_j y_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j} \Phi,$$

$$F'_{t_к} = -M_к x_4,$$

$$(x_4)'_{t_к} = \left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_к} x_4 + 2M_к \frac{y_1 x_4}{\Phi},$$

где

$$j = 1, 2; \quad к = 3, 4$$

Действительно, система (29) получена из системы (18); поэтому система (29) есть следствие системы (18). Справедливо и обратное: алгебраическая комбинация уравнений системы (29) приводит к уравнениям системы (18). Например, умножая на F второе уравнение системы (29) и вычитая результат из первого уравнения, найдем

$$(f_{12})'_{t_j} = \frac{M_j}{M_1} x_1 + F\left[(g_{12})'_{t_j} - \frac{M_j}{M_1} y_1\right]$$

Отсюда в силу обозначений (15) имеем первое уравнение системы (18). Также можно получить и остальные уравнения системы (18).

Этим доказана эквивалентность систем (18) и (29).

ТЕОРЕМА 2.

Уравнение (1) тогда и только тогда представимо в виде (2), если в окрестности каждой точки области G имеют место равенства

$$(M_3)'_{t_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 5) \tag{30}$$

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_5} = 0, \tag{31}$$

$$(B_1)'_{t_5} = 0, \tag{32}$$

$$(\ln A)''_{t_4 t_j} - 2\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (33)$$

$$\left[\frac{M_1^2}{A}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\right]'_{t_4} = 0 \quad (34)$$

Из теоремы 1 следует, что уравнение (1) представимо в виде (2), если система уравнений (18) или эквивалентная ей система (29) имеет решение. Для существования решения последней необходимо тождественное выполнение равенств вторых смешанных производных всех входящих в нее функций.

Так, условие $(f_{12})''_{t_1 t_2} = (f_{12})''_{t_2 t_1}$ в силу тождества (9) дает соотношение

$$\frac{M_2}{M_1}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_1} - \left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_2} - 2\left(\frac{M_2}{M_1}\right)''_{t_4 t_1} - 2\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4} B_1 = 0,$$

которое по упрощении принимает вид

$$M_1(\ln A)''_{t_2 t_4} - M_2(\ln A)''_{t_1 t_4} = 0. \quad (35)$$

Условия $(f_{12})''_{t_2 t_k} = 0 (k=3,4)$ удовлетворяются в силу равенств (12).

Рассматривая условие $(f_{12})''_{t_2 t_5} = 0$, получаем

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_5} x_1 - \left(\frac{M_2}{M_1}\right)''_{t_4 t_5} \Phi F = 0.$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_5} = 0 \quad (31)$$

Из условия $(x_1)''_{t_1 t_2} = (x_1)''_{t_2 t_1}$ следует равенство

$$(B_1)'_{t_2} - (B_2)'_{t_1} = 0,$$

которое в результате преобразований приводится к виду (35)

Из условий $(x_1)''_{t_j t_к}=0$ $(j=1, 2;\ к=3, 4)$ находим

$$\left[2(B_j)'_{t_к}-M_к\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\right]x_1+4\left[\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'''_{t_4 t_j t_к}-\right.$$

$$\left.-\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_к}\right]\Phi F=0.$$

Ввиду того, что это условие должно выполняться при различных значениях функций F, x_1, y_1, x_4, определяемых преобразованиями (20), заключаем, что

$$2(B_j)'_{t_к}-M_к\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}=0 \quad (j=1, 2;\quad к=3, 4) \qquad (36)$$

$$\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'''_{t_4 t_j t_к}-\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_к}=0 \quad (j=1, 2;\ k=3, 4) \qquad (37)$$

Используя обозначения (10), а также условия (5) и тождества (6), соотношения (36) преобразовываем к виду

$$M_к(\ln A)''_{t_4 t_j}+2\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_к}=0 \quad (j=1, 2;\quad k=3, 4) \qquad (38)$$

При к=4 имеем

$$(\ln A)''_{t_4 t_j}-2\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4}=0 \quad (j=1, 2) \qquad (33)$$

Рассматриваем условия (38) при к=3. Учитывая равенство (33), последовательно имеем

$$M_3(\ln A)''_{t_4 t_j}+2\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_3}=2M_3\left[M_j\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4}+$$

$$+2\left[M_j\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_3}=2M_3 M_j\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)''_{t_4 t_4}+$$

$$+2M_3(M_j)'_{t_4}\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}+2M_j\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)''_{t_4 t_3}+2(M_j)'_{t_3}\left(\ln\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}=$$

$$= 2M_j \left[M_3 \left(\ln \frac{M_j}{A} \right)''_{t_4 t_4} + \left(\ln \frac{M_j}{A} \right)''_{t_4 t_3} + (M_3)'_{t_4} \left(\ln \frac{M_j}{A} \right)'_{t_4} \right] =$$

$$= 2 M_j \left[\left(\ln \frac{M_j}{A} \right)'_{t_3} + M_3 \left(\ln \frac{M_j}{A} \right)'_{t_4} \right]'_{t_4}.$$

Но в силу равенств (11) и (13) при к=3, $\left(\ln \frac{M_j}{A} \right)'_{t_3} +$ $+ M_3 \left(\ln \frac{M_j}{A} \right)'_{t_4} = 0$. Отсюда следует, что условие (38) при к=3 есть следствие условий (33). Следствием условий (33) и тождества (8) является условие (35).

Используя условие

$$\left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'_{t_3} + M_3 \left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'_{t_4} + (M_3)'_{t_4} = 0,$$

$$\left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'''_{t_3 t_j t_4} + (M_3)'_{t_4} \left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)''_{t_4 t_j} + M \left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'''_{t_4 t_j t_4} = 0,$$

являющиеся следствием равенств (11) и (13) при к=3, можно показать, что условие (37) при к=3 есть следствие условий (37) при к=4.

Условия (37) при к=4 можно переписать в виде

$$\left[\frac{M_1^2}{A} \left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)''_{t_4 t_j} \right]'_{t_4} = 0 \quad (j = 1,2) \tag{34}$$

Из условий $(x_1)''_{t_j t_5} = 0$ $(j = 1, 2)$ находим

$$2(B_j)'_{t_5} + \left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'''_{t_4 t_j t_5} \Phi F = 0 \quad (j = 1,2)$$

Но $\left(\ln \frac{A}{M_1^2} \right)'''_{t_4 t_j t_5} = \left[\frac{\left(\frac{M_2}{M_1} \right)''_{t_5 t_4}}{\left(\frac{M_2}{M_1} \right)'_{t_4}} \right]''_{t_4 t_j} = 0$ в силу (31).

Дифференцируя тождество (9) по t_5, получим

$$(B_2)'_{t_5} - \frac{M_2}{M_1} (B_1)'_{t_5} = 0.$$

Поэтому из условия

$$(B_1)'_{t_5} = 0 \tag{32}$$

следует и $(B_2)'_{t_5} = 0$.

Условия интегрируемости для второго и четвертого уравнений системы (29) те же самые, что для первого и третьего уравнений системы.

Рассматривая условия интегрируемости для уравнений $F'_{t_к} = -M_к x_4$ ($к = 3, 4$) получаем

$$(M_3)'_{t_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 5) \tag{30}$$

Все условия интегрируемости для последнего уравнения системы (29) или выполняются тождественно, или являются следствиями полученных условий.

Таким образом, все условия интегрируемости системы (29) рассмотрены, а условия (30)—(34) на функции M_j и их производные действительно являются необходимыми.

Достаточность этих условий вытекает из теоремы Фробениуса [5, § 26].

ТЕОРЕМА 3.

Функции формы (2) определяются (однозначно с точностью до проективных преобразований) с помощью лишь квадратур.

Пусть условия (30)—(34) выполняются тождественно. Тогда уравнение (1) представимо в виде (2). Условия интегрируемости обеспечивают независимость коэффициентов уравнений системы (29) от переменной t_5. Решаем систему при выбранных начальных условиях (19).

Так, при $t_j = t_{j1}$ ($j = 1, 2$) имеем следующую подсистему для определения функции $F(t_3, t_4)$:

$$\left.\begin{aligned} F'_{t_к} &= -M_к^{012} x_4, \\ (x_4)'_{t_к} &= \left[\left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_к}\right]^{012} x_4 \end{aligned}\right\} (k = 3,4) \tag{39}$$

где обозначено $[L(t_1, t_2, t_3, t_4)]^{0lk} = L(t_1, t_2, t_3, t_4)_{\substack{t_l=t_{l1} \\ t_k=t_{k1}}}$ и т. д.

Из второго уравнения системы (39) находим

$$x_4 = \left(\frac{A}{M_1^2}\right)^{012} \left(\frac{M_1^2}{A}\right)^{01234}$$

Вставляя это значение функции x_4 в первое уравнение системы (39), получаем

$$F'_{t_к} = -\left(\frac{M_к A}{M_1^2}\right)^{012} \left(\frac{M_1^2}{A}\right)^{01234} \qquad (k = 3,4).$$

Решением этого уравнения будет функция

$$F(t_3,t_4) = \left(\frac{M_1^2}{A}\right)^{01234} \left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{012} - \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{01234}\right] + 1. \qquad (40)$$

Далее, при $t_к = t_{к1}$, $(к=3,4)$ имеем следующую подсистему для определения функций $f_{12}(t_1, t_2)$, $g_{12}(t_1, t_2)$:

$$\left.\begin{aligned}
(f_{12})'_{t_j} &= \left(\frac{M_j}{M_1}\right)^{034} x_1 - \left[\left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4}\right]^{034} (x_1 - y_1), \\
(x_1)'_{t_j} &= B_j^{034} x_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\right]^{034} (x_1 - y_1), \\
(g_{12})'_{t_j} &= \left(\frac{M_j}{M_1}\right)^{034} y_1 - \\
&- \left[\left(\frac{M_j}{M_1}\right)'_{t_4}\right]^{034} (x_1 - y_1), \\
(y_1)'_{t_j} &= B_j^{034} y_1 + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\right]^{034} (x_1 - y_1).
\end{aligned}\right\} (j=1, 2) \quad (41)$$

Комбинируя второе и четвертое уравнения этой системы, получаем

$$(x_1-y_1)'_{t_j}=B_j^{034}(x_1-y_1) \quad (j=1,2) \qquad (42)$$

Из уравнений (42) в силу условия $(B_1)'_{t_2}=(B_2)'_{t_1}$ находим

$$x_1-y_1=l^{\int_{t_{11}}^{t_1} B_1^{034}\,dt_1+\int_{t_{21}}^{t_2} B_2^{0134}\,dt_2} \qquad (43)$$

Считая при дальнейшем решении системы (41) функцию x_1-y_1 известной, из второго и четвертого уравнений системы получаем

$$x_1=x_1-y_1+\frac{1}{2}(x_1-y_1)\left\{\left[\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4}\right]^{034}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4}\right]^{01234}\right\} \qquad (44)$$

$$y_1=\frac{1}{2}(x_1-y_1)\left\{\left[\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4}\right]^{034}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(\ln\frac{A}{M_1^2}\right)'_{t_4}\right]^{01234}\right\} \qquad (45)$$

Наконец, из первого и третьего уравнений системы (41) окончательно получаем выражение для функций $f_{12}(t_1, t_2)$ и $g_{12}(t_1, t_2)$:

$$f_{12}=\int_{t_{11}}^{t_1} x_1\,dt_1+\int_{t_{21}}^{t_2}\left\{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{034}x_1-\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4}\right]^{034}(x_1-y_1)-\right.$$
$$\left.\int_{t_{11}}^{t_1}(x_1)'_{t_2}dt_1\right\}dt_2-1 \qquad (46)$$

$$g_{12}=\int_{t_{11}}^{t_1} y_1\,dt_1+\int_{t_{21}}^{t_2}\left\{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{034}y_1-\right.$$
$$\left.-\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)'_{t_4}\right]^{034}(x_1-y_1)-\int_{t_{11}}^{t_1}(y_1)'_{t_2}\,dt_1\right\}dt_2 \qquad (47)$$

где x_1-y_1, x_1, y_1 уже определены формулами (43)—(45).

Замечание.

Вид левой части уравнения (2) показывает, что функции f_{34} и g_{34} достаточно найти с точностью до их отношения.

Найдем выражение функций $f_{56}(t_5, t_6)$ и $g_{56}(t_5, t_6)$ через функции f_{12}, g_{12}, F.

Из уравнения (2) имеем

$$f_{56} = F(g_{56} - g_{12}) + f_{12}.$$

Продифференцировав это выражение по переменным t_1 и t_4 и разделив первый результат на второй, получаем

$$M_1 F'_{t_4}(g_{56} - g_{12}) + (f_{12})'_{t_1} - F(g_{12})'_{t_1} = 0.$$

Отсюда находим

$$g_{56} = \frac{F(g_{12})'_{t_1} - (f_{12})'_{t_1}}{M_1 F'_{t_4}} + g_{12},$$

$$f_{56} = F\frac{F(g_{12})'_{t_1} - (f_{12})'_{t_1}}{M_1 F'_{t_4}} + f_{12}.$$

Принимая во внимание соотношения (22) и (23) при $j=2$, можно выражения для функций f_{56}, g_{56} представить в более симметричном виде:

$$f_{56} = f_{12} + \frac{M_1 (f_{12})'_{t_2} - M_2 (f_{12})'_{t_1}}{A}, \qquad (48)$$

$$g_{56} = g_{12} + \frac{M_1 (g_{12})'_{t_2} - M_2 (g_{12})'_{t_1}}{A}. \qquad (49)$$

Выражение функций f_{56} и g_{56} через переменные t_5 и t_6 можно получить, если присоединить к уравнениям (48) и (49) уравнение (1).

Таким образом, все функции формы (2) определены, и притом, только квадратурами.

СЛЕДСТВИЕ

Если уравнение (1) представимо в виде канонической формы (2), то все номограммы этой формы проективны в области G.

Действительно, функции f_{12}, g_{12}, F, удовлетворяющие начальным условиям (19), определяются по формулам (40), (46), (47) однозначно в окрестности каждой точки области G. Отсюда следует, что каноническая форма (2) с точностью до аффинных преобразований (20) определяется однозначно. Так как с помощью коллинеаций можно перевести несобственную прямую — носитель шкалы переменных t_3, t_4 — в номограмме, соответствующей уравнению (2), в произвольную прямую, то отсюда и следует справедливость формулируемого следствия.

Выделим некоторые частные случаи, вытекающие из вышеприведенных общих рассуждений.

В работе [1] указано, что бинарное поле переменных t_5, t_6 тогда и только тогда вырождается в бинарную (вообще говоря, криволинейную) шкалу, когда выполняется условие

$$(M_1)'_{t_5} = 0. \tag{50}$$

Присоединяя это условие к условиям (30)—(34) теоремы 2, имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.

Уравнение (1) тогда и только тогда представимо в виде (2), допускающем номограмму с невырожденным бинарным полем переменных t_1, t_2 и бинарной криволинейной шкалой переменных t_5, t_6, когда функции M_j в области G тождественно удовлетворяют условиям:

$$(M_j)'_{t_5} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{51}$$

$$(M_3)'_{t_j} = 0, \quad (j = 1, 2) \tag{52}$$

$$(\ln A)''_{t_4 t_j} - 2\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4} = 0. \quad (j = 1, 2) \tag{33}$$

$$\left[\frac{M_1^2}{A}\left(\ln \frac{A}{M_1^2}\right)''_{t_4 t_j}\right]'_{t_4} = 0. \quad (j = 1, 2) \tag{34}$$

Из общего случая можно получить также условия представимости уравнения (1) в виде (2), когда в соответствующей номограмме поле переменных t_5, t_6 вырождается в прямолинейную бинарную шкалу.

ТЕОРЕМА 5

Уравнение (1) тогда и только тогда представимо в виде (2), допускающем номограмму с невырожденным бинарным полем переменных t_1, t_2 и прямолинейными бинарными шкалами пар переменных t_3, t_4 и t_5, t_6, когда функции M_j в области G тождественно удовлетворяют условиям:

$$(M_j)'_{t_5} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{51}$$

$$(M_3)'_{t_j} = 0, \quad (j = 1, 2) \tag{52}$$

$$(\ln A)''_{t_4 t_j} = 0, \quad (j = 1, 2) \tag{53}$$

$$\left[A\left(\frac{M_1}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4} = 0. \tag{54}$$

Действительно, если шкала переменных t_5, t_6 является прямолинейной, то, в виду возможности коллинеарного преобразования плоскости номограммы, соответствующей уравнению (2), можем считать, что $f_{56} = g_{56}$ и поэтому из равенств (48) и (49) имеем

$$\frac{M_1}{A}(f_{12} - g_{12})'_{t_2} - \frac{M_2}{A}(f_{12} - g_{12})'_{t_1} + f_{12} - g_{12} = 0.$$

Дифференцируя это соотношение дважды по переменной t_4, получаем

$$\left(\frac{M_1}{A}\right)'_{t_4}(f_{12} - g_{12})'_{t_2} - \left(\frac{M_2}{A}\right)'_{t_4}(f_{12} - g_{12})'_{t_1} = 0.$$

$$\left(\frac{M_1}{A}\right)''_{t_4 t_4}(f_{12} - g_{12})'_{t_2} - \left(\frac{M_2}{A}\right)''_{t_4 t_4}(f_{12} - g_{12})'_{t_1} = 0.$$

Исключая отсюда $(f_{12} - g_{12})'_{t_1}$, $(f_{12} - g_{12})'_{t_2}$, находим

$$\left(\frac{M_1}{A}\right)'_{t_4}\left(\frac{M_2}{A}\right)''_{t_4 t_4} - \left(\frac{M_2}{A}\right)'_{t_4}\left(\frac{M_1}{A}\right)''_{t_4 t_4} \equiv D = 0$$

Но для любого уравнения (1), независимо от его номографируемости, имеют место тождества

$$M_jAD + \left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4} \equiv 0 \quad (j=1,2) \tag{55}$$

Из (55) в силу Д=0 получаем

$$\left[A\left(\frac{M_j}{A}\right)'_{t_4}\right]'_{t_4} = 0 \quad (j=1, 2) \tag{56}$$

Далее, из тождества (8) следует, что из условий (56) независимым является одно, например, (54). Присоединяя равенство (54) к условиям теоремы 4 и проведя некоторые элементарные преобразования, приходим к условиям (51)—(54).

Из полученных здесь результатов возможно найти условия номографируемости для уравнений с меньшим числом переменных — с пятью и четырьмя, для чего достаточно положить в уравнении (1) t_5=const, или t_3 = const, или t_3 = const, t_5 = const.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Коробицына. О представлении уравнений бинарными номограммами типа Сен-Робера. Учен. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, сб. 31, 1965.

2. Г. Я. Коробицына. О бинарных номограммах типа Коши. Учен. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, сб. 31, 1965.

3. Г. С. Прокопьев. О бинарных номограммах второго жанра с ответной прямолинейной шкалой уравнения с шестью переменными. Учен. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, вып. 2, сб, 79, 1969.

4. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.

5. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Гостехиздат, М., 1947.

СОДЕРЖАНИЕ

Ульяновский государственный
педагогический институт имени И. Н. Ульянова

Ученые записки, т. 27, в. 7

Серия математическая

Редактор **Г. В. Пушкарева**

Техн. редактор **Ю. В. Лаврентьева**

Корректоры **З. В. Никитина, Н. В. Пенская**

ЗМ 05126. Сдано в набор 13/X 1972 г.
Подписано к печати 20/III 1973 г.
Формат бумаги 84×108 1/32. Бумага газетная. Усл. печ. л. 5,68.
Уч.-изд. л. 5,58. Тираж 1000 экз. Заказ № 6294. Цена 65 коп.

Областная типография уприздата.
432600. Ульяновск, Ленина, 114.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
15	27-я сверху	...состояния.	...солнцестояния.
61	3-я снизу	$[l_{1,2}]$...	$[l_1, l_2]$...
65	6-я снизу	$\|O_2X_1\| +$...	$\|O_2K\| +$...
68	2-я снизу	...обозначено $[\beta, M]$...	...обозначено $[\beta, M)$...
70	2-я сверху	$[a, M)$,...	$[\alpha, M)$...
	4-я сверху	Полоса (ab)...	Полоса $[ab]$...
71	9-я снизу	...к прямым a и d	...к прямым a и b
72	9-я снизу	...с центром O_3...	...с центром O_2...
80	5-я снизу	...$[l_1, M)$ $[l_2, M)$. U	$[l_1, \dot{M}) \cap [l_2, M)$
81	24-я сверху	$\angle COD \cap [OK)$.	$\angle COD \cup [OK)$
84	2-я снизу	l_1 — первая...	l^1 — первая...
87	1-я сверху	ш[10]	Тш[10]
	7-я снизу	...$(\angle OAK_1 =$...	...$(\angle AOK_1 =$...
	8-я снизу	...$(\angle AOK_1 =$...	...$(\angle AK_1O =$...
100	11-я снизу	...+M (ln...	...$+M_3$(ln...
103	7-я сверху	$x_1 - y_1 = l$	$x_1 - y_1 = e$

Цена 65 коп.